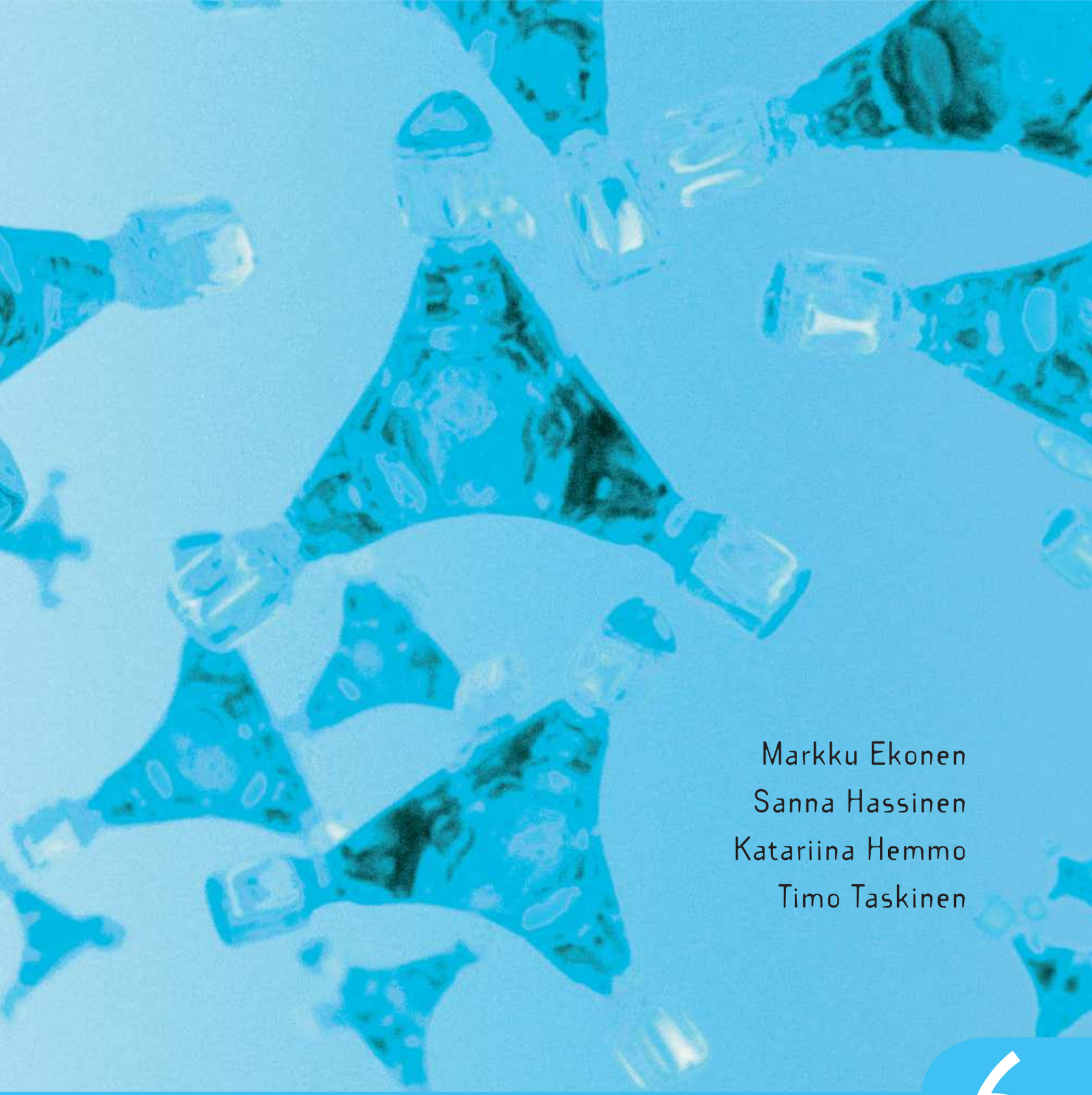


Markku Ekonen
Sanna Hassinen
Katariina Hemmo
Timo Taskinen

LUKION LYHYT MATEMATIIKKA

6

SIGMA

Matemaattisia malleja II

Sanoma Pro Oy • Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-2581-1 Sigma 6

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2349-7
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2351-0

ISBN 978-952-63-2581-1

Toimitus: Sanna Niemelä
Piirrokset: Marja Venäläinen ja Juho Niemelä
Ulkoasu: Riitta Piuva
Taitto: Printable / Pirkko Pihlaja
Kansi: Riitta Piuva
Kannen kuva: Getty Images

Valokuvat: iStockphoto

© Markku Ekonen, Sanna Hassinen, Katariina Hemmo, Timo Taskinen
ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla
(404/61).

Sisällys

1 Yhtälöitä ja epäyhtälöitä 7

1.1 Kahden muuttujan lineaarinen yhtälö 7
Tehtäviä 14
1.2 Yhtälöpari 16
Tehtäviä 26
1.3 Kahden muuttujan lineaarinen epäyhtälö 29
Tehtäviä 39
1.4 Lausekkeen arvo tasoalueessa 43
Tehtäviä 52
1.5 Sovelluksia lineaarisesta optimoinnista 55
Tehtäviä 62

2 Lukujonot ja summat 66

2.1 Lukujono 66
Tehtäviä 73
2.2 Aritmeettinen lukujono 76
Tehtäviä 84
2.3 Aritmeettinen summa 87
Tehtäviä 94
2.4 Geometrinen lukujono 97
Tehtäviä 104
2.5 Geometrinen summa 107
Tehtäviä 115

3 Kertausosa 120

4 Ekstrat 129

Tehtävien vastaukset 148

Hakemisto 159

Kirjan käyttäjälle

Matematiikan opetuksen tarkoituksena on rohkaista opiskelijaa oivaltavaan oppimiseen, kehittää matemaattista ajattelua ja ongelmanratkaisutaitoa. Sigman rakenne tukee näiden tavoitteiden toteutumista.

Pohdinta

Osa kirjan alaluvuista alkaa pohdintatehtävillä. Niiden tarkoituksena on yleensä johdatella opetettavaan aiheeseen ja herättää kysymyksiä. Opettaja voi käyttää tehtäviä osana opetusta, tai opiskelija voi tutustua tehtäviin itsenäisesti.

Teoria

Teoria on jaettu aihekokonaisuuksiin sivuotsikoiden avulla. Näin eri osa-alueet löytyvät helpommin. Suuremmat kokonaisuudet voidaan otsikoiden avulla jakaa sopiviin opetuskokonaisuuksiin.

Tehtävät

Tehtävät on koottu teorian mukaisten sivuotsikoiden avulla kokonaisuuksiksi, joista on helppo valikoida sopivat tehtävät aihepiirin ja vaikeusasteen mukaan.

120.

Vaativammat tehtävät on merkitty väripohjalla.

E1

Joidenkin harjoitustehtävien edessä olevan esimerkkiviittauksen tarkoituksena on tukea harjoittelemista sekä oppitunnilla että kotona. Jokaista kirjan esimerkkiä vastaa tehtäväosassa samantyyppinen tehtävä.

Kirjassa on mukana vanhoja ylioppilastehtäviä. Ylioppilaskokeen vuosi ja tehtävänumero on ilmoitettu tehtävänannon lopussa, esimerkiksi [S2008, 1]

Sekalaisia tehtäviä

Tehtäväosion lopussa on sekalaisia tehtäviä -osio, johon on koottu muutama tehtävä koko luvun aihealueista. Tämän osion tehtäviä voi käyttää esimerkiksi kotitehtävinä.

Keskeisiä käsitteitä

Jokaisen luvun lopussa on käsitekartta, joka kokoaa luvun keskeiset käsitteet.

Kertausosa

Kirjan lopussa olevaan kertausosaan on koottu lyhyesti kunkin luvun tärkeimmät asiat. Jokaiseen lukuun liittyy lisäksi kertaustehtäviä. Kertausosan lopussa on myös kolme harjoituskoetta.

Ekstrat

Kirjan loppuun on koottu ekstraluvuksi kurssiin liittyvää oheismateriaalia. Ekstroja voi tarpeen mukaan käyttää joko opetuksessa tai opiskelijan omana lukemistona. Teoriaosassa on viittauksia ekstralukuun.

Helsingissä maaliskuussa 2014

Tekijät

Mistä tullaan ja minne mennään?

Matematiikassa monet ongelmat vaativat usean eri tiedon hallintaa; asiat ja käsitteet pohjautuvat ja liittyvät toisiinsa. Kurssissa Matemaattisia malleja II tarvitaan paljon aikaisempien kurssien tietoja ja taitoja. Tämä kurssi yhdessä muiden pakollisten kurssien kanssa antaa mahdollisuudet osallistua ylioppilastutkintoon. Lyhyen matematiikan oppimäärä luo lisäksi hyvän perustan jatko-opinnoille.

Sigma 1

Lausekkeet ja yhtälöt
- ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöt
- prosentti

Sigma 2

Geometria
- geometriset kuviot

Sigma 3

Matemaattisia malleja I
- funktion käsite
- kuvaajan piirtäminen koordinaatistoon
- potenssi ja eksponenttiyhtälöt

Sigma 4

Matemaattinen analyysi
- polynomifunktion derivaatta

Sigma 5

Tilastot ja todennäköisyys

Sigma 6

Matemaattisia malleja II

Sigma 7

Talousmatematiikka

Sigma 8

Matemaattisia malleja III

Ylioppilaskirjoitukset

Jatko-opinnot

1 Yhtälöitä ja epäyhtälöitä

1.1 Kahden muuttujan lineaarinen yhtälö

POHDINTA 1

Uusia ylioppilaskirjoituksia varten koululle hankitaan kannettavia tietokoneita. Tarjolla olevista malleista A maksaa 600 € ja B maksaa 400 €. Koululle päätetään hankkia molempia malleja.

a) Tutki taulukon avulla hankintakustannuksia ja muodosta hankintakustannusten lauseke, kun mallia A hankitaan x kappaletta ja mallia B y kappaletta.

Mallin A määrä (kpl)	Mallin B määrä (kpl)	Hankintakustannukset yhteensä (€)
1	2	$1 \cdot 600 + 2 \cdot 400$
3	7	
15	10	
x	y	

b) Tietokonehankintoihin koululla on käytettävissä 50 000 €, jonka koulu käyttää kokonaan. Muodosta a-kohdan avulla tilanteesta yhtälö.

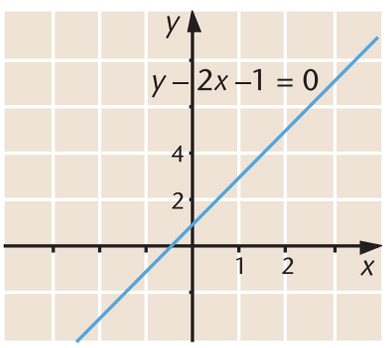
Täydennä taulukko yhtälön avulla.

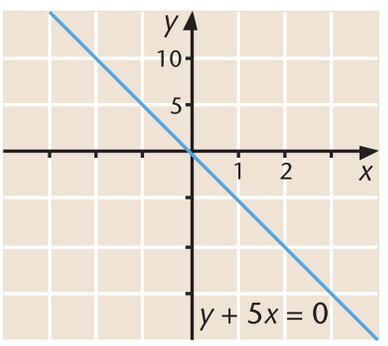
Mallin A määrä (kpl)	Mallin B määrä (kpl)
30	
50	
	35
	110

Yhtälön ratkaisu

Yhtälöä $ax + by + c = 0$ sanotaan **kahden muuttujan lineaariseksi yhtälöksi**. Yhtälön ratkaisu ei ole yksittäinen luku, vaan kaikki lukuparit (x, y), jotka toteuttavat tämän yhtälön, ovat sen ratkaisuja. Ratkaisuja on äärettömän monta, ja sen vuoksi ne ilmoitetaan usein koordinaatistoon piirretyn kuvaajan avulla. Koska lineaarisessa yhtälössä esiintyvät muuttujat x ja y ovat ensimmäistä astetta, yhtälön ratkaisujen muodostama kuvaaja on suora.

Kahden muuttujan lineaarisia yhtälöitä ovat esimerkiksi $y - 2x - 1 = 0$ ja $y + 5x = 0$. Näiden yhtälöiden ratkaisuna ovat kaikki suoran pisteet.





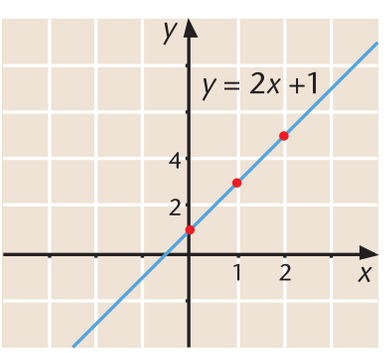
Kahden muuttujan lineaarinen yhtälö esitetään usein ratkaistussa muodossa. Suoran yhtälöstä on tällöin ratkaistu muuttujalle y lauseke.

- Yleinen muoto $\quad y - 2x - 1 = 0$
- Ratkaistu muoto $\quad y = 2x + 1$

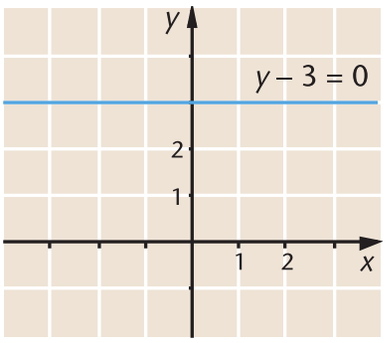
Yhtälön $y - 2x - 1 = 0$ ratkaisuna ovat siis kaikki suoran $y = 2x + 1$ pisteet. Suoran piirtämiseksi muuttujalle x annetaan arvoja ja lasketaan vastaavat muuttujan y arvot. Merkitään saadut pisteet koordinaatistoon ja piirretään pisteiden kautta kulkeva suora.

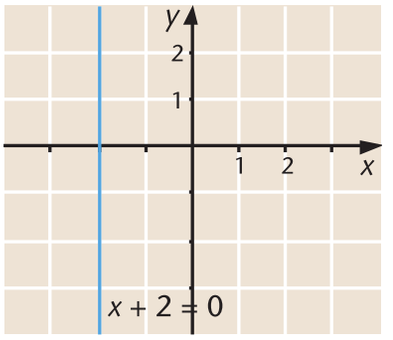
Suoran piirtämiseksi kannattaa määrittää kolme pistettä.

x	$y = 2x + 1$	(x, y)
0	$y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$	(0, 1)
1	$y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$	(1, 3)
2	$y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$	(2, 5)



Myös yhtälöiden $y - 3 = 0$ ja $x + 2 = 0$ kuvaajana on suora, vaikka niissä ei olekaan kahta muuttujaa. Nämä suorat, $y = 3$ ja $x = -2$, ovat koordinaattiakselien suuntaisia.





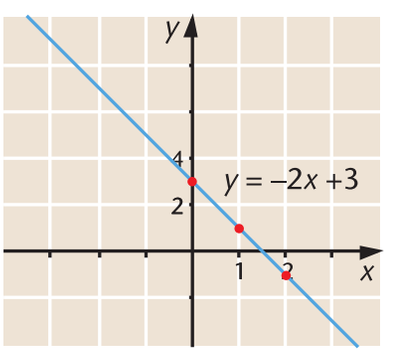
ESIMERKKI 1 Esitä suoran yhtälö $4x + 2y - 6 = 0$ ratkaistussa muodossa ja kuvaa yhtälön ratkaisua koordinaatistossa.

RATKAISU Ratkaistaan yhtälö muuttujan y suhteen.

$$\begin{aligned} 4x + 2y - 6 &= 0 \\ 2y &= -4x + 6 \quad | : 2 \\ y &= -2x + 3 \end{aligned}$$

Piirretään suoran $y = -2x + 3$ kuvaaja.

x	$y = -2x + 3$	(x, y)
0	$y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$	(0, 3)
1	$y = -2 \cdot 1 + 3 = 1$	(1, 1)
2	$y = -2 \cdot 2 + 3 = -1$	(2, –1)

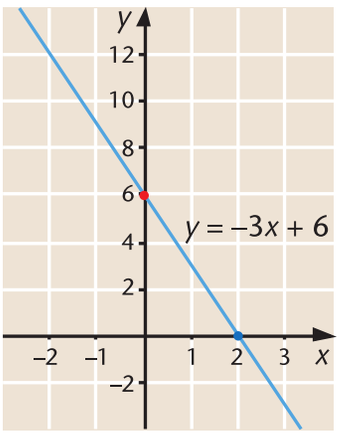


VASTAUS $y = -2x + 3$

Leikkauspisteitä

Suora $ax + by + c = 0$ leikkaa molemmat koordinaattiakselit aina, kun $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Suoran ja x-akselin leikkauspiste on aina ratkaistava yhtälön avulla, ellei tehtävänanto edellytä esimerkiksi graafista ratkaisemista. Jos suora on esitetty ratkaistussa muodossa, y-akselin leikkauspiste voidaan päätellä vakiotermistä. Esimerkiksi suora $y = -3x + 6$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 6)$ ja x-akselin pisteessä $(2, 0)$.

Ratkaisu muoto $y = -3x + 6$
y-akselin leikkauspiste $(0, 6)$
x-akselin leikkauspiste $(2, 0)$



ESIMERKKI 2 Määritä suoran $2x + 3y + 3 = 0$ ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

RATKAISU Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$. Sijoitetaan tämä suoran yhtälöön ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot 0 + 3 &= 0 \\ 2x + 3 &= 0 \\ 2x &= -3 \quad \big| : 2 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Leikkauspiste on $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

Suoran ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 + 3y + 3 &= 0 \\ 3y &= -3 \quad \big| : (-3) \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on $(0, -1)$.

VASTAUS Leikkauspisteet ovat $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ ja $(0, -1)$.

ESIMERKKI 3 Määritä graafisesti suorien $4x - y + 5 = 0$ ja $9x - 3y + 12 = 0$ leikkauspiste.

RATKAISU Kirjoitetaan molemmat suoran yhtälöt ensin ratkaistussa muodossa.

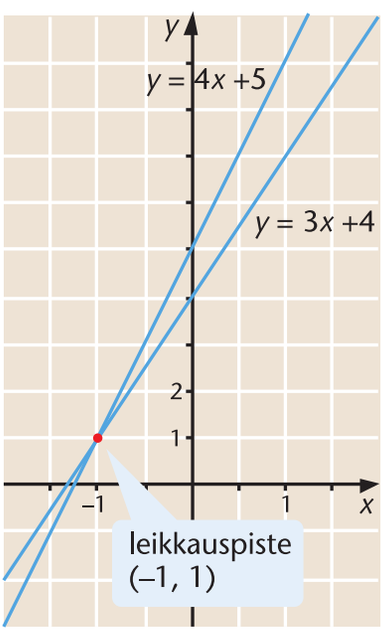
$$\begin{aligned} 4x - y + 5 &= 0 \\ -y &= -4x - 5 \quad |: (-1) \\ y &= 4x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9x - 3y + 12 &= 0 \\ -3y &= -9x - 12 \quad |: (-3) \\ y &= 3x + 4 \end{aligned}$$

Piirretään suorien kuvaajat samaan koordinaatistoon. Lasketaan piirtämistä varten muutamia pisteitä molemmilta suorilta.

x	$y = 4x + 5$
-2	$y = 4 \cdot (-2) + 5 = -3$
0	$y = 4 \cdot 0 + 5 = 5$
1	$y = 4 \cdot 1 + 5 = 9$

x	$y = 3x + 4$
-2	$y = 3 \cdot (-2) + 4 = -2$
0	$y = 3 \cdot 0 + 4 = 4$
1	$y = 3 \cdot 1 + 4 = 7$



Leikkauspisteen tarkempi määrittäminen algebrallisesti tehdään menetelmillä, joihin tutustutaan seuraavassa luvussa.

Kuvan perusteella suorien leikkauspiste on $(-1, 1)$. Tämä piste kuuluu kummallekin suoralle, eli se toteuttaa molempien suorien yhtälöt.

VASTAUS Suorien leikkauspiste on $(-1, 1)$.

ESIMERKKI 4

Saara oli kesätöissä mansikkaviljelmällä. Hän poimi päivän aikana mansikoita 5 kg:n ja 10 kg:n laatikoihin. Päivän aikana Saara poimi yhteensä 70 kg mansikoita, joista täyttyi x kappaletta 5 kg:n laatikoita ja y kappaletta 10 kg:n laatikoita. Muodosta tilanteesta yhtälö. Esitä vastaus graafisesti koordinaatistossa.

RATKAISU

Tarkastellaan tilannetta ensin taulukon avulla.

5 kg:n laatikoita (kpl)	10 kg:n laatikoita (kpl)	Mansikoiden määrä yhteensä
2	2	$2 \cdot 5 + 2 \cdot 10$
2	3	$2 \cdot 5 + 3 \cdot 10$
4	3	$4 \cdot 5 + 3 \cdot 10$
x	y	$x \cdot 5 + y \cdot 10 = 5x + 10y$

Mansikoiden määrän riippuvuutta täysien laatikoiden lukumäärästä kuvaa siis lauseke

$$5x + 10y$$

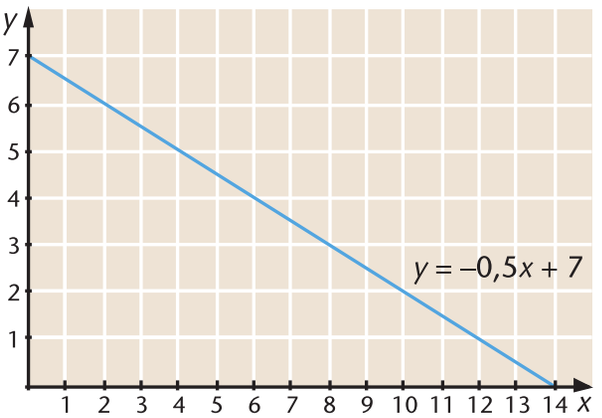
jossa x on 5 kg:n laatikoiden lukumäärä ja y on 10 kg:n laatikoiden lukumäärä.

Jos Saara kerää mansikoita yhteensä 70 kg, saadaan yhtälö

$$5x + 10y = 70$$

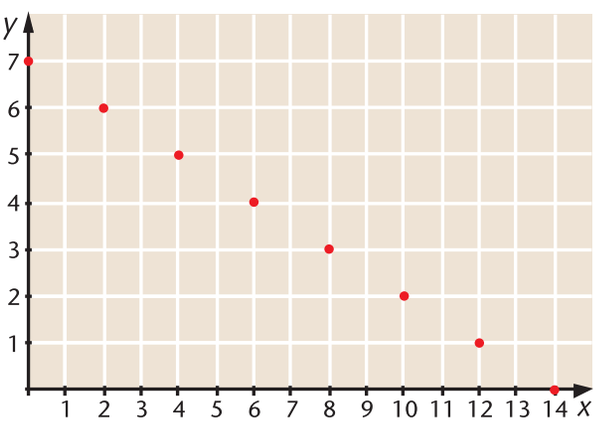
Ratkaistaan yhtälöstä y kuvaajan piirtämistä varten.

$$\begin{aligned} 5x + 10y &= 70 \\ 10y &= 70 - 5x \qquad | : 10 \\ y &= 7 - 0{,}5x \end{aligned}$$



Koska x ja y kuvaavat lukumääriä, ne eivät voi saada negatiivisia arvoja.
Suorasta piirretään tällöin näkyviin vain se osa, jossa sekä muuttujan x että muuttujan y arvot ovat ei-negatiivisia.

Jos tehtävänantoa tulkitaan siten, että laatikoiden määrät voivat saada vain kokonaislukuarvoja, yhtälön kuvaajana ei ole jana, vaan kuvaaja muodostuu janalle kuuluvista kokonaislukupareista.



Ongelman käsittelyn helpottamiseksi tällaisen pisteittäisen kuvaajan tilalla käytetään usein suoraa. Tällöin vastauksessa on huomioitava, mitä arvoja tarkasteltava suure voi todellisuudessa saada.

VASTAUS $5x + 10y = 70$

Tehtäviä

1. Piirrä suora.
   a) $y = 5x + 1$ b) $2x + y = 0$ c) $3x - 6y = 12$

2. Ratkaise yhtälö y:n suhteen. Piirrä yhtälön kuvaaja.
   a) $y - 3x = 1$ b) $-5x + 5y = 10$ c) $4x = 2y + 6$

E1 3. Ratkaise yhtälö y:n suhteen ja esitä ratkaisu koordinaatistossa.
   a) $3x + 2y - 4 = 0$ b) $-x + 3y - 18 = 0$ c) $6 - 4y + 2x = 2$

E2 4. Määritä suoran $5x - 3y - 6 = 0$ ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

5. Missä pisteissä suora $3x - y + 4 = 0$ leikkaa koordinaattiakselit?

6. Määritä vakio k siten, että suora $y = kx - 8$ leikkaa x-akselin pisteessä $(12, 0)$.

E3 7. Ratkaise graafisesti suorien $-5x + y - 1 = 0$ ja $-4x + y - 2 = 0$ leikkauspiste.

8. Ratkaise kuvaajan avulla, mikä piste toteuttaa molemmat yhtälöt.
   a) $y = 3x + 4$ ja $2x + 2y = -8$
   b) $-4x + 5y + 9 = 0$ ja $2x + y - 1 = 0$

9. Ratkaise graafisesti suorien $y = -2x - 4$ ja $3y - x - 2 = 0$ leikkauspiste. Tutki lisäksi, toteuttaako leikkauspiste yhtälön $y = x + 2$.

10. Kennelissä on pitkäkarvaisia ja lyhytkarvaisia mäyräkoiria. Kuvaa yhtälöllä pitkä- ja lyhytkarvaisten mäyräkoirien määriä, kun kennelissä on koiria yhteensä 24.

E4 11. Kauppias tilaa leipomolta tuoreita korvapuusteja neljän ja kuuden pullan pusseissa. Kauppias tilaa yhteensä 240 korvapuustia. Muodosta tilanteesta yhtälö.

12. Eläintarhassa on sijoitettu samaan aitaukseen ankkoja ja vuohia.
   a) Kuvaa ankkojen ja vuohien määrän riippuvuutta toisistaan, jos eläinten jalkojen yhteismäärä on 48.
   b) Montako ankkaa aitauksessa on, jos vuohia on 6 kappaletta?

13. Arpajaisissa myydään 2,00 euron ja 2,50 euron hintaisia arpoja.
    a) Muodosta yhtälö, joka kuvaa erihintaisten arpojen määrien riippuvuutta toisistaan, kun arpoja arvioidaan myytävän yhteensä 200,00 eurolla.
    b) Ratkaise yhtälön avulla, kuinka monta kalliimpaa arpaa myydään, jos kahden euron arpoja menee kaupaksi 60 kappaletta.

14. Rakennusalan yritys suunnittelee kerrostalon rakentamista. Rakennusluvan mukaan kerrostalossa saa olla asuinneliöitä yhteensä 1600 m^2. Taloon halutaan kahdenkokoisia asuntoja: kaksioita, joiden koko on 50 m^2 ja kolmioita, joiden koko on 100 m^2.
    a) Muodosta yhtälö, joka kuvaa erikokoisten asuntojen määrän riippuvuutta toisistaan.
    b) Kuinka monta kolmiota voidaan rakentaa, jos kaksioita halutaan rakentaa 10?

Sekalaisia tehtäviä

15. Ratkaise y:n suhteen yhtälö $8x + 2y - 16 = 0$ ja esitä ratkaisu koordinaatistossa.

16. Määritä suoran $-2y - 4x + 12 = 0$ ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

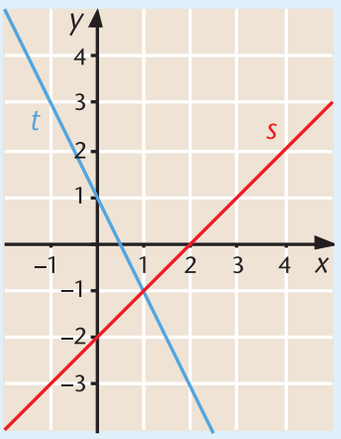
17. Määritä graafisesti suorien leikkauspiste.
    a) $y = 8 - x$ ja $y = 4x - 2$
    b) $2x - 3y + 9 = 0$ ja $y - x = 4$

18. 120 henkilön hääseurue siirtyy kirkolta juhlapaikalle. Paikalle on tilattu takseja. Osa takseista on tilatakseja, joihin mahtuu kahdeksan henkilöä. Muihin takseihin mahtuu vain neljä henkilöä. Esitä taksien lukumäärän ja juhlavieraiden lukumäärän välistä riippuvuutta kuvaava yhtälö.

19. Luomutilan varastossa on kananmunia kuuden ja kymmenen munan pakkauksissa.
    a) Muodosta yhtälö, joka kuvaa erikokoisten pakkausten lukumäärien riippuvuutta toisistaan, kun kananmunia on yhteensä 900 kappaletta.
    b) Ratkaise yhtälön avulla, kuinka monta kuuden munan pakkausta varastossa on, jos kymmenen munan pakkauksia on 18 kappaletta.

1.2 Yhtälöpari

POHDINTA 1 Koordinaatistoon on piirretty suorien s ja t kuvaajat. Vastaa kysymyksiin kuvaajien perusteella.



a) Piste A on suoralla s. Pisteen x-koordinaatti on 3. Mikä on pisteen y-koordinaatti?

b) Piste B on suoralla t. Pisteen y-koordinaatti on 3. Mikä on pisteen x-koordinaatti?

c) Onko piste $C(2, -1)$ suoralla s?

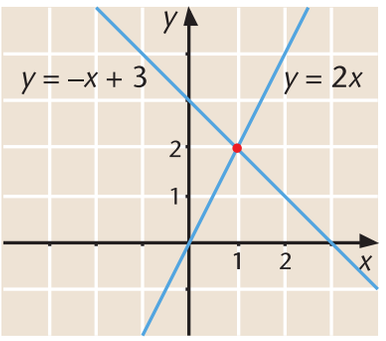
d) Piste D on suorien yhteinen piste. Määritä pisteen D koordinaatit.

POHDINTA 2 Edellisen pohdintatehtävän suorien yhtälöt ovat s: $y = x - 2$ ja t: $y = -2x + 1$. Miten selvittäisit laskemalla vastaukset pohdintatehtävän 1 kysymyksiin?

Yhtälöparin ratkaiseminen

Yhtälöparin avulla voidaan tarkastella tilanteita, joissa kahden yhtälön halutaan toteutuvan samanaikaisesti.

Tarkastellaan yhtälöiden $y = -x + 3$ ja $y = 2x$ kuvaajia.



Kuvan perusteella suorat leikkaavat toisensa pisteessä $(1, 2)$. Suorien leikkauspiste on piste, joka on molemmille suorille yhteinen piste. Tällöin leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat samanaikaisesti kummatkin suoran yhtälöt. Tämä voidaan esittää muodostamalla suorien yhtälöistä yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 2x \end{cases}$$

Yhtälöparissa kirjoitetaan yhden ison aaltosulkumerkin perään ne yhtälöt, joiden yhteisiä ratkaisuja halutaan etsiä.

Tämän yhtälöparin yhtälöissä esiintyy kaksi muuttujaa (x ja y). Yhtälöparia ratkaistaessa pyritään pääsemään tilanteeseen, jossa ratkaistavaksi jää vain yhden muuttujan yhtälö eli jossa toinen muuttujista on eliminoitu. Kun yksi yhtälöparin muuttuja on saatu selville, saadaan ratkaistua myös toinen yhtälöparin muuttujista. Yhtälöparin ratkaisu on tavallisesti yksikäsitteinen lukupari (x, y), mutta ratkaisuja ei välttämättä ole lainkaan tai niitä voi olla ääretön määrä.

Lineaarinen yhtälöpari voidaan ratkaista kahdella menetelmällä:

Epälineaarinen yhtälöpari s. 129

- **sijoitusmenetelmällä**
- **yhteenlaskumenetelmällä**.

Yhtälöryhmän ratkaiseminen s. 132

Kahden muuttujan lineaariset yhtälöparit ovat ratkaistavissa kummallakin menetelmällä. Se, kumpaa menetelmää missäkin tilanteessa kannattaa käyttää, riippuu yhtälöparin yhtälöiden esitysmuodosta.

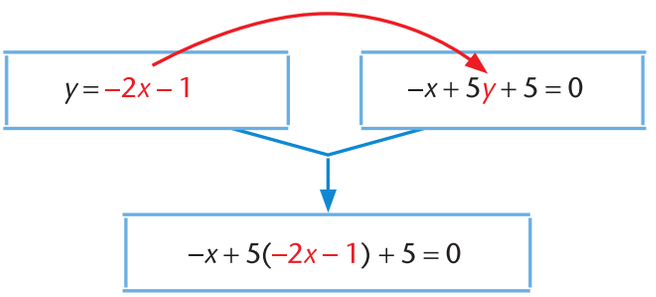
- Jos vähintään toinen yhtälöistä on ratkaistussa muodossa, kannattaa käyttää sijoitusmenetelmää.
- Jos yhtälöt eivät ole ratkaistussa muodossa tai ratkaistujen muotojen kertoimet ovat hankalia lukuja, yhtälöpari kannattaa ratkaista yhteenlaskumenetelmällä.

ESIMERKKI 1 Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} y = -2x - 1 \\ -x + 5y + 5 = 0. \end{cases}$

RATKAISU

Yhtälöpari kannattaa ratkaista sijoitusmenetelmällä, koska toinen yhtälöistä on ratkaistussa muodossa.

1 **Sijoitetaan** ensimmäisestä yhtälöstä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön y:n paikalle.



2 **Ratkaistaan** saadusta yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} -x + 5(-2x - 1) + 5 &= 0 \\ -x - 10x - 5 + 5 &= 0 \\ -11x &= 0 \qquad \vert : (-11) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

3 **Sijoitetaan** saatu muuttujan x arvo jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

Arvo $x = 0$ voidaan sijoittaa myös jälkimmäiseen yhtälöön $-x + 5y + 5 = 0$. Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan kuitenkin suoraan haluttu y:n arvo.

Sijoitetaan $x = 0$ ensimmäiseen yhtälöön $y = -2x - 1$.

$$y = -2 \cdot 0 - 1 = -1$$

VASTAUS $x = 0$ ja $y = -1$

Vastaus voidaan antaa myös muodossa $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1. \end{cases}$

ESIMERKKI 2 Ratkaise suorien $4y = -2x + 6$ ja $9y - 3x + 3 = 0$ leikkauspisteen koordinaatit.

RATKAISU Ratkaistaan leikkauspiste yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} 4y = -2x + 6 \\ 9y - 3x + 3 = 0 \end{cases}$$

Jos yhtälöt muutetaan ratkaistuun muotoon, saadaan murtolukukertoimia. Tältä vältytään, jos yhtälöpari ratkaistaan yhteenlaskumenetelmällä.

1 **Siirretään** tuntemattomat vasemmalle puolelle ja vakiot oikealle.

$$\begin{cases} 4y + 2x = 6 \\ 9y - 3x = -3 \end{cases}$$

2 **Eliminoidaan** yhtälöistä toinen muuttuja.

Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla 3 ja alempi luvulla 2. Näin termien x kertoimet ovat toistensa vastalukuja.

$$\begin{cases} 4y + 2x = 6 & \mid \cdot 3 \\ 9y - 3x = -3 & \mid \cdot 2 \end{cases}$$

Jos ylempi yhtälö kerrotaan luvulla –9 ja alempi luvulla 4, saadaan eliminoitua y.

$$\begin{cases} 12y + 6x = 18 \\ 18y - 6x = -6 \end{cases}$$

Kun yhtälöt lasketaan nyt allekkain yhteen, saadaan eliminoitua x.

$$\begin{cases} 12y + 6x = 18 \\ 18y - 6x = -6 \end{cases}$$

$$30y = 12 \qquad \mid : 30$$

$$y = \frac{12}{30}$$

$$y = \frac{2}{5}$$

3 **Sijoitetaan** saatu y:n arvo jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön ja ratkaistaan x.

$$4y = -2x + 6$$

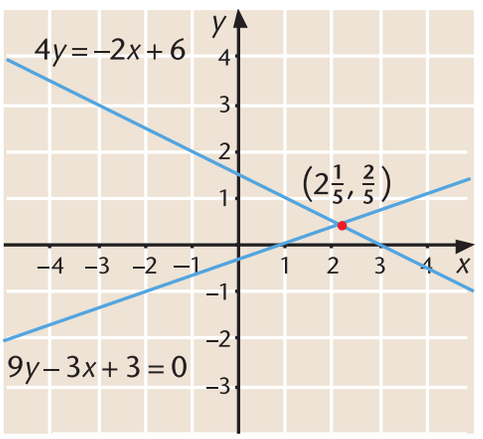
$$4 \cdot \frac{2}{5} = -2x + 6 \qquad \text{Sijoitetaan } y = \frac{2}{5}.$$

$$\frac{8}{5} = -2x + 6$$

$$2x = 6 - \frac{8}{5}$$

$$2x = \frac{22}{5} \qquad \big| : 2$$

$$x = 2\frac{1}{5}$$



VASTAUS Leikkauspiste on $\left(2\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

ESIMERKKI 3 Ratkaise yhtälöpari.

a) $\begin{cases} 6y - 2x = 24 \\ y = \frac{1}{3}x - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - y = 2 \\ 3x - \frac{3}{5}y = \frac{6}{5} \end{cases}$

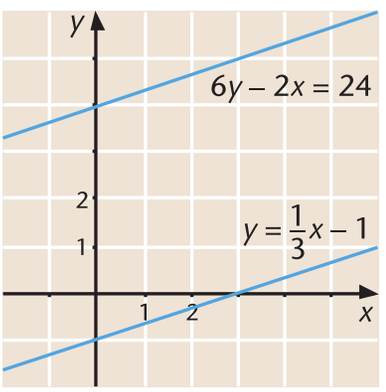
RATKAISU

a) Koska toinen yhtälöistä on valmiiksi ratkaistussa muodossa, ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{aligned} 6(\tfrac{1}{3}x - 1) - 2x &= 24 \\ \tfrac{6}{3}x - 6 - 2x &= 24 \\ 2x - 6 - 2x &= 24 \\ -6 &= 24 \end{aligned}$$

Sijoitetaan jälkimmäinen yhtälö $y = \frac{1}{3}x - 1$ ylempään yhtälöön.

Tulokseksi saatu väite $-6 = 24$ on epätosi. Yhtälöparilla ei siis ole ratkaisua.



Yhtälöitä kuvaavat suorat ovat yhdensuuntaisia, joten suorat eivät leikkaa toisiaan.

b) Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskumenetelmällä. Kerrotaan yhtälöt sopivilla luvuilla niin, että toinen tuntemattomista eliminoituu.

$$\begin{cases} 5x - y = 2 & \mid \cdot 3 \\ 3x - \frac{3}{5}y = \frac{6}{5} & \mid \cdot (-5) \end{cases}$$

Eliminoidaan tuntematon x kertomalla ylempi yhtälö luvulla 3 ja alempi luvulla –5. Näin termien x kertoimiksi saadaan vastaluvut.

$$\begin{cases} 15x - 3y = 6 \\ -15x + 3y = -6 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

Tuloksena saatu väite $0 = 0$ on tosi. Tämä tarkoittaa sitä, että yhtälöparilla on ääretön määrä ratkaisuja. Kuitenkaan kaikki luvut eivät kelpaa ratkaisuksi. Tämä huomataan, kun molemmat yhtälöt kirjoitetaan ratkaistussa muodossa.

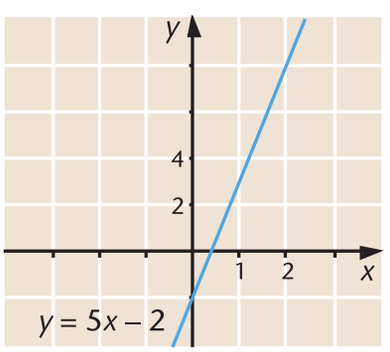
Yhtälö 1:

$$\begin{aligned} 5x - y &= 2 \\ -y &= -5x + 2 \qquad \big| : (-1) \\ y &= 5x - 2 \end{aligned}$$

Yhtälö 2:

$$\begin{aligned} 3x - \frac{3}{5}y &= \frac{6}{5} \\ -\frac{3}{5}y &= -3x + \frac{6}{5} \qquad \left| \cdot\left(-\frac{5}{3}\right) \right. \\ y &= -3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)x - \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{3} \cdot \frac{6}{\underset{1}{\cancel{5}}} \\ y &= 5x - 2 \end{aligned}$$

Suorien yhtälöt ovat samat, joten ne kulkevat koordinaatistossa päällekkäin. Yhtälöparin ratkaisuja ovat siis kaikki pisteet, jotka toteuttavat suoran $y = 5x - 2$ yhtälön. Leikkauspisteitä eli yhtälöparin ratkaisuja on ääretön määrä.



VASTAUS

a) Ei ratkaisua.
b) Ratkaisuja ovat kaikki suoran $y = 5x - 2$ pisteet.

Yhtälöpari sovellustehtävissä

Yhtälöpari on työväline sovellustehtäviin, joissa tarvitaan kahta muuttujaa. Sanallisessa tehtävässä tulee valita tarvittavat muuttujat ennen yhtälöparin muodostamista. Tuntemattomat suureet löytyvät usein tehtävän lopusta eli tuntemattomiksi kannattaa valita ne asiat, joita tehtävässä kysytään.

POHDINTA 3

Autovuokraamo tarjoaa asiakkailleen kahta erilaista sopimusta. Sopimuksen A mukaan asiakas maksaa 25 €:n perusmaksun ja sen lisäksi 0,15 € jokaiselta ajetulta kilometriltä. Sopimuksen B mukaan maksetaan ensin perusmaksu 40 € ja sitten 0,10 € ajokilometriltä.

a) Täydennä taulukot.

Sopimus A

Ajokilometrit x (km)	Kokonaishinta y (€)	(x, y)
100		
200		
400		
x		

Sopimus B

Ajokilometrit x (km)	Kokonaishinta y (€)	(x, y)
100		
200		
400		
x		

b) Merkitse pisteet koordinaatistoon ja piirrä riippuvuuksia kuvaavat suorat.

c) Kumpi sopimuksista kannattaa valita, kun ajetaan 250 km?

d) Kumpi sopimuksista kannattaa valita, kun ajetaan 350 km?

e) Milloin kannattaa valita sopimus B?

ESIMERKKI 4

Bussilastillinen lomailijoita saapui viettämään päivää huvipuistoon. Jokainen lomailija osti rannekkeen, jolla pääsi kaikkiin huvipuiston laitteisiin. Aikuisten ranneke maksoi 27 € ja lasten ranneke 16 €. Lomailijoilta kului yhteensä rannekkeisiin rahaa 772 €. Kuinka monta aikuista ja kuinka monta lasta bussissa oli, kun lomailijoita oli yhteensä 40?

RATKAISU

1 **Valitaan** kirjaimet kuvaamaan tuntemattomia suureita.

Tehtävässä kysytään aikuisten ja lasten lukumääriä, joten merkitään

- aikuisten lukumäärää kirjaimella x
- lasten lukumäärää kirjaimella y.

2 **Muodostetaan** annettujen tietojen avulla yhtälöt.

	Lukumäärä	Rannekkeiden hinta (€)
Aikuiset	x	$27x$
Lapset	y	$16y$
Yhteensä	40	772

Lukumäärä yhteensä 40: $x + y = 40$
Rannekkeiden hinta yhteensä 772 €: $27x + 16y = 772$

3 Muodostetaan yhtälöpari ja **ratkaistaan** se.

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} x + y = 40 \quad \big| \cdot(-16) \\ 27x + 16y = 772 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16x - 16y = -640 \\ 27x + 16y = 772 \end{cases}$$

$$11x = 132 \quad \big| :11$$

$$x = 12$$

Lomailijoista oli siis aikuisia 12.

Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä y.

$$x + y = 40$$
$$y = 40 - x$$

Lasten määrä on $y = 40 - 12 = 28$.

VASTAUS

Busseissa oli 12 aikuista ja 28 lasta.

ESIMERKKI 5

Metalliseoksessa A on 40 % rautaa ja loput kuparia. Metalliseoksessa B on 70 % rautaa ja loput kuparia. Miten näitä seoksia on yhdistettävä, kun halutaan valmistaa 1500 kg:n erä seosta, jossa rautaa on 1000 kg?

RATKAISU

Tarkastellaan tilannetta taulukon avulla. Sekoitetaan alkuperäisiä seoksia siten, että seosta A otetaan x kg ja seosta B otetaan y kg.

Seos	Seoksen massa (kg)	Rautaa (kg)	Kuparia (kg)
A	x	$0{,}40x$	$0{,}60x$
B	y	$0{,}70y$	$0{,}30y$

Koska tuotteen massa on 1500 kg, saadaan yhtälö $x + y = 1500$.

Raudan massan on oltava 1000 kg eli $0{,}40x + 0{,}70y = 1000$. Näistä yhtälöistä saadaan yhtälöpari, joka voidaan ratkaista yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} x + y = 1500 & \mid \cdot(-0{,}40) \\ 0{,}40x + 0{,}70y = 1000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0{,}40x - 0{,}40y = -600 \\ 0{,}40x + 0{,}70y = 1000 \end{cases}$$

$$0{,}30y = 400 \quad \mid : 0{,}30$$

$$y = 1333{,}33\ldots$$

Kun $y = 1333{,}33\ldots \approx 1330$, niin

$$x = 1500 - y = 1500 - 1330 = 170$$

VASTAUS

170 kg seosta A ja 1330 kg seosta B.

Tehtäviä

Yhtälöparin ratkaiseminen

20. Ratkaise yhtälöpari sijoitusmenetelmällä.

a) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -2x - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3y + 2 \\ x = 5y - 8 \end{cases}$

21. Ratkaise yhtälöpari yhteenlaskumenetelmällä.

a) $\begin{cases} 3y + x = 5 \\ -3y - 5x = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + 4x = 8 \\ -2y - 4x = -4 \end{cases}$

E1 22. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} y = 3x - 4 \\ 2x + 3y + 23 = 0. \end{cases}$

23. Määritä luvut x ja y, jotka toteuttavat molemmat yhtälöt.
a) $3x - 6y = 0$ ja $y = x + 1$
b) $4x - y = 3$ ja $y = x - 3$

24. Määritä suorien leikkauspisteet.
a) $y = 3x + 1$ ja $y = -x + 1$
b) $y = 5x - 4$ ja $y = x + 4$

E2 25. Määritä luvut s ja t, jotka toteuttavat molemmat yhtälöt.
a) $-2s + 5t = 0$ ja $5s - 8t = 9$
b) $2s + t = 2$ ja $-4s + t = 1$

26. Ratkaise yhtälöpari.

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 6 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x + 5y = 3 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

27. Ratkaise yhtälöpari.

a) $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ [S2012, 1c]

b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 8 \end{cases}$ [K2012, 1c]

E3 28. Ratkaise yhtälöpari.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 4x = 12 - 4y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$

29. Määritä suorien leikkauspisteet.

a) $10y = 4x + 50$ ja $y = \frac{2}{5}x + 3$

b) $2x + 3y = 1$ ja $-6x - 9y + 3 = 0$

30. Ratkaise yhtälöpari. [K1993, 3a]

$$\begin{cases} 5(x+y) - 2(x-y) = 15 \\ 7(x+y) - 3(x-y) = 21 \end{cases}$$

Yhtälöpari sovellustehtävissä

31. Kahden luvun summa on 46. Kun suurempi luvuista kerrotaan kahdella ja pienempi kolmella ja lasketaan näin saadut luvut yhteen, summaksi saadaan 103. Määritä luvut.

32. Koulun pihalla on autoja ja polkupyöriä, yhteensä 53 kulkuneuvoa. Renkaita on yhteensä 136. Muodosta yhtälöpari ja ratkaise autojen ja polkupyörien määrät.

E4 33. Kaisa oli kesätöissä elokuvateatterin lippuluukulla. Eräänä iltana hän laski myyneensä 180 elokuvalippua illan näytöksiin. Aikuisten liput maksoivat 8 € kappale ja lasten liput 5 €. Kuinka monta lasta ja kuinka monta aikuista oli illan aikana käynyt elokuvissa, kun Kaisalla oli kassassa rahaa 1269 €?

34. Karamellitehdas valmistaa suklaakonvehteja kahdella eri täytteellä. Mansikkatäytteiset konvehdit painavat 5,0 g ja appelsiinitäytteiset 6,5 g. Tehtaan omassa myymälässä on myynnissä konvehtirasia, jossa on yhteensä 40 konvehtia. Kuinka monta mansikkatäytteistä ja kuinka monta appelsiinitäytteistä konvehtia rasia sisältää, kun sen sisältö painaa 224 grammaa?

35. Ludvig van Beethoven, Wolfgang Amadeus Mozart ja Johann Sebastian Bach elivät yhteensä 156 vuotta. Bach eli 9 vuotta vanhemmaksi kuin Beethoven, Mozart kuoli 21 vuotta nuorempana kuin Beethoven. Kuinka vanhoiksi säveltäjät elivät? [S2011, 4]

36. Tuija ostaa alennusmyynnistä paidan ja housut. Housuista hän saa 25 %:n alennuksen ja paidasta 40 %:n alennuksen. Vaatteet maksavat yhteensä 60,60 €. Jos Tuija olisi ostanut vaatteet normaalihintaisina, ne olisivat maksaneet yhteensä 88,00 €. Laske vaatteiden normaalihinnat.

E5 37. Kemistillä on pulloissa kahdenlaista suolaliuosta. Laimeammassa liuoksessa on suolaa 5,0 % liuoksen massasta ja väkevämmässä 15 % massasta. Miten liuoksia on sekoitettava, kun halutaan valmistaa 2,0 kg liuosta, jossa on suolaa 0,16 kg?

38. Etanolin ja veden seos painoi yhteensä 1,80 kg. Seosta haihdutettiin lämpökaapissa siten, että haihdutuksen aikana etanolin massa pieneni 12,0 % ja veden massa 6,00 %. Haihdutuksen jälkeen seos punnittiin ja sen massaksi todettiin 1,65 kg. Kuinka monta prosenttia alkuperäisen seoksen massasta oli alkoholia?

Sekalaisia tehtäviä

39. Ratkaise yhtälöpari.

a) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ x + y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ [S2013, 2b]

40. Määritä sellaiset luvut x ja y, jotka toteuttavat yhtälöt $2x + y = 2$ ja $6x = 3y + 6$.

41. Määritä suorien leikkauspisteet.

a) $\begin{cases} 5x + 7y = -1 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 6y = 4x - 6 \end{cases}$

42. Kaksi kahvia ja kolme munkkia maksaa 8,40 €. Kolme kahvia ja viisi munkkia maksaa 13,40 €. Laske kahvin ja munkin hinta.

43. Leipomo ostaa erän jauhoja ja kananmunia. Aineista päätetään valmistaa kakkuja ja piirakoita. Yhteen kakkuun tarvitaan 5 dl jauhoja ja 2 munaa. Piirakkaan kuluu 2,5 dl jauhoja ja 2 munaa. Jauhoja on yhteensä 62 litraa ja munia 352. Kuinka monta kakkua ja piirakkaa leivotaan, jos kaikki aineet käytetään?

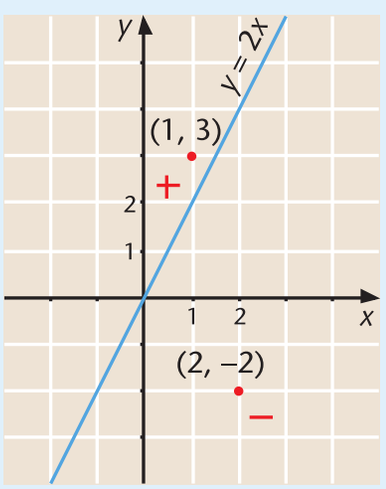
1.3 Kahden muuttujan lineaarinen epäyhtälö

POHDINTA 1

Tarkastele lausekkeen $-2x + y$ arvoja täydentämällä seuraava taulukko.

x	y	$-2x + y$
1	3	$-2 \cdot 1 + 3 = 1$
2	–2	$-2 \cdot 2 + (-2) = -6$
1	1	
2	–1	
–1	3	
–1	–3	
1	4	
2	5	

Merkitse taulukon pisteet (x, y) samaan koordinaatistoon suoran $y = 2x$ kanssa. Merkitse pisteen viereen tieto siitä, onko lausekkeen $-2x + y$ arvo kyseisessä pisteessä positiivinen (+) vai negatiivinen (–).

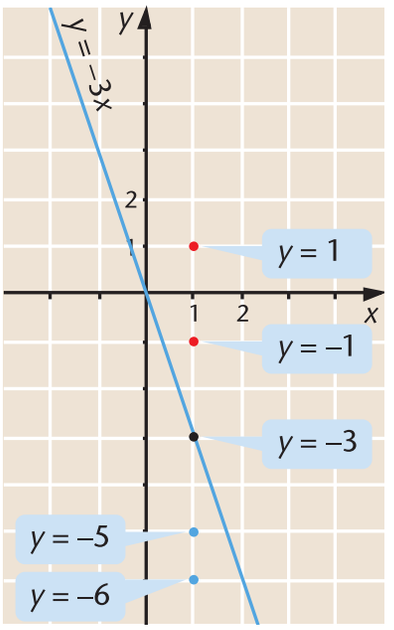


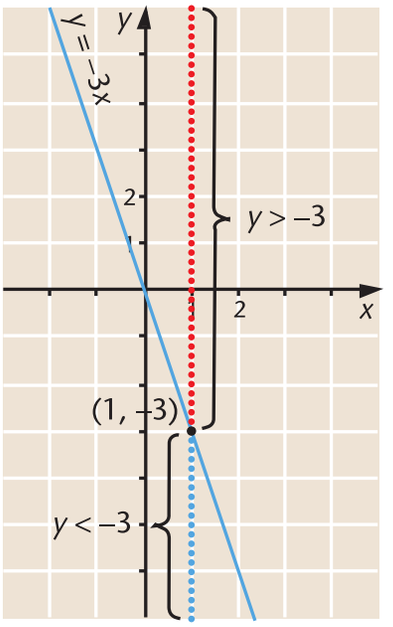
Päättele kuvaajan perusteella, missä pisteen (x, y) on sijaittava, jotta lausekkeen $-2x + y$ arvo olisi

a) positiivinen b) negatiivinen c) nolla.

Kahden muuttujan epäyhtälö

Yhtälön $3x + y = 0$ kuvaaja on laskeva suora $y = -3x$. Esimerkiksi piste $(1, -3)$ on tällä suoralla. Kun tästä pisteestä siirrytään kohtisuoraan ylöspäin, säilyy x-koordinaatin arvo ennallaan, mutta y saa suurempia arvoja kuin -3. Vastaavasti alaspäin siirryttäessä y saa pienempiä arvoja kuin -3.





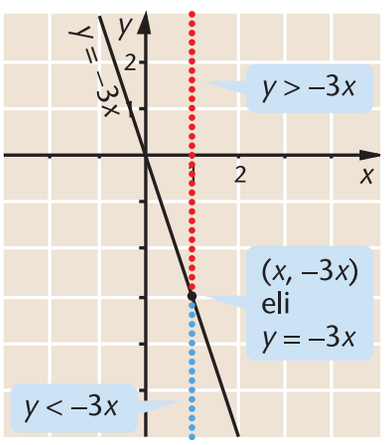
Koska suoran yhtälö on $y = -3x$, suoran mielivaltainen piste voidaan ilmoittaa muodossa $(x, -3x)$. Niinpä kaikkien suoran yläpuolella olevien pisteiden y-koordinaateille on voimassa ehto

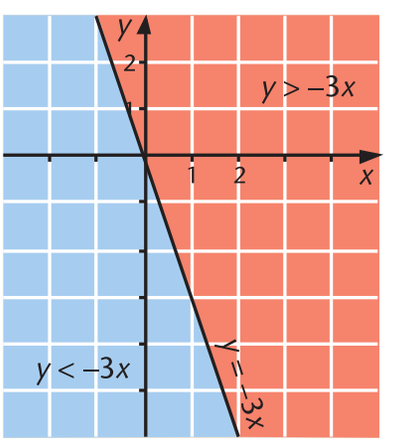
$$y > -3x$$

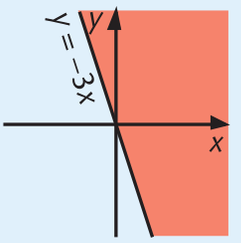
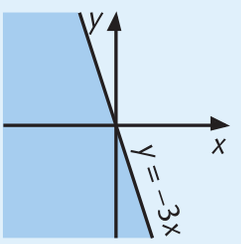
ja suoran alapuolella oleville pisteille on voimassa ehto

$$y < -3x$$

Suora $y = -3x$ jakaa näin xy-tason kahteen alueeseen, jotka voidaan ilmoittaa epäyhtälöiden avulla.





Epäyhtälö	Epäyhtälö ratkaistuna muuttujan y suhteen	Epäyhtälön graafinen ratkaisu
$y + 3x > 0$	$y > -3x$	suoran $y = -3x$ yläpuolinen tasoalue 
$y + 3x < 0$	$y < -3x$	suoran $y = -3x$ alapuolinen tasoalue 

Epäyhtälö $ax + by + c < 0$ on esimerkki **kahden muuttujan lineaarisesta epäyhtälöstä**. Kahden muuttujan lineaarisen epäyhtälön ratkaisu voidaan esittää koordinaatistoon piirretyn tasoalueen avulla. Ratkaisemisessa voi edetä esimerkiksi seuraavan kaavion mukaan.

1. Ratkaise epäyhtälö y:n suhteen. Muista, että negatiivisella luvulla kertominen tai jakaminen muuttaa epäyhtälömerkin suunnan.

2. Muuta epäyhtälö yhtälöksi korvaamalla epäyhtälömerkki yhtäsuuruusmerkillä. Piirrä yhtälöä kuvaava suora koordinaatistoon.

3. Päättele kohdan 1 epäyhtälön perusteella, kummalla puolella suoraa ratkaisuna oleva tasoalue on.

4. Valitse ratkaisuna olevasta tasoalueesta tarkistuspiste. Pisteen on toteutettava epäyhtälö.

5. Ilmoita vastaus. Yleensä vastaukseksi riittää tasoalueen kuvaaja.

ESIMERKKI 1 Ratkaise epäyhtälö $6x - 2y < 4$.

RATKAISU

1 Ratkaistaan epäyhtälö y:n suhteen.

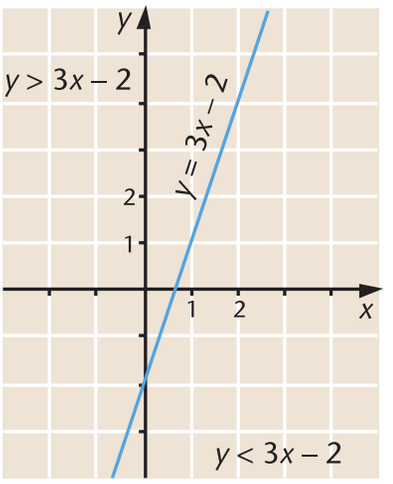
$$\begin{aligned} 6x - 2y &< 4 \\ -2y &< -6x + 4 \quad | : (-2) \\ y &> 3x - 2 \end{aligned}$$

Tämän epäyhtälön avulla päätellään epäyhtälön ratkaisu.

2 Piirretään suora $y = 3x - 2$.

3 Päätellään epäyhtälön ratkaisuna oleva tasoalue.

- Suoran yläpuolella olevissa pisteissä $y > 3x - 2$.
- Suoran alapuolella olevissa pisteissä $y < 3x - 2$.



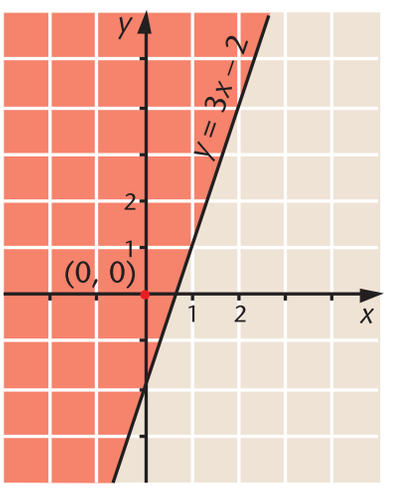
Ratkaisuna on siis suoran $y = 3x - 2$ yläpuolinen tasoalue.

4 Valitaan epäyhtälön ratkaisuna olevasta tasoalueesta yksi tarkistuspiste.

Esimerkiksi origo $(0, 0)$ sijaitsee suoran $y = 3x - 2$ yläpuolella. Tutkitaan, toteuttaako tämä piste epäyhtälön $y > 3x - 2$.

$$\begin{aligned} 0 &> 3 \cdot 0 - 2 \\ 0 &> -2 \end{aligned}$$

Tarkistuspiste toteuttaa yhtälön.



VASTAUS Suoran $y = 3x - 2$ yläpuolella oleva tasoalue.

ESIMERKKI 2

Ravintolaan hankitaan uusia lautasia. Isompi lautanen maksaa 20 € ja pienempi 15 €. Keittiöpäälliköllä on valtuudet käyttää hankintoihin enintään 2400 €. Muodosta epäyhtälö, joka kuvaa lautasten hankinnoista aiheutuvia kustannuksia ja esitä epäyhtälön ratkaisu graafisesti.

RATKAISU

Jos isoja lautasia ostetaan x kappaletta, niihin kuluu rahaa $20x$ (€). Jos pieniä lautasia ostetaan y kappaletta, niihin kuluu rahaa $15y$ (€). Hankinnat maksavat yhteensä $20x + 15y$.

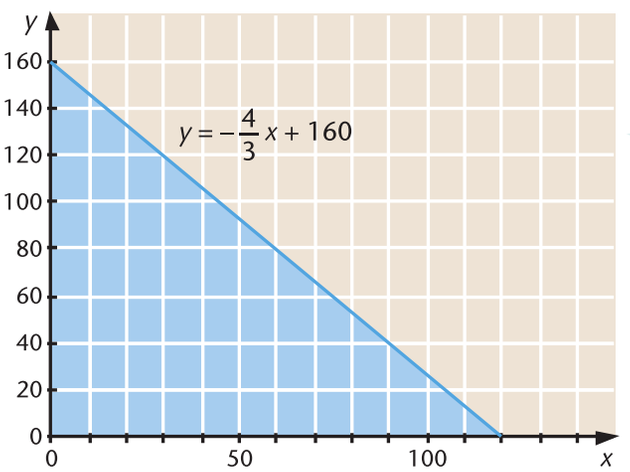
Koska rahaa voidaan käytä enintään 2400 €, saadaan epäyhtälö

$$20x + 15y \leq 2400$$

Ratkaistaan tämä epäyhtälö muuttujan y suhteen.

$$\begin{aligned} 20x + 15y &\leq 2400 \\ 15y &\leq -20x + 2400 \quad \big| :15 \\ y &\leq -\frac{4}{3}x + 160 \end{aligned}$$

Piirretään suora $y = -\frac{4}{3}x + 160$.



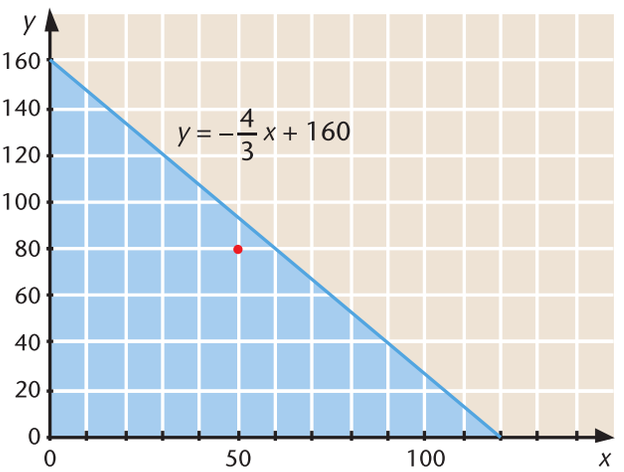
Koordinaattiakselit rajoittavat kuvaajan, koska lautasten määrät eivät voi olla negatiivisia lukuja.

Tasoalue, joka esittää epäyhtälöä $20x + 15y \leq 2400$, on suoran alapuolinen osa.

Valitaan tarkistuspisteeksi piste (50, 80).

$$20 \cdot 50 + 15 \cdot 80 = 2200 \leq 2400$$

Piste toteuttaa epäyhtälön. Ravintola voi siis ostaa esimerkiksi 50 isoa ja 80 pientä lautasta.



VASTAUS

Kustannuksia voidaan kuvata epäyhtälöllä $20x + 15y \leq 2400$. Epäyhtälön ratkaisuna on suora $y = -\frac{4}{3}x + 160$ ja sen alapuolelle jäävä osa tasoa.

Epäyhtälöryhmät

Jos samanaikaisesti tarkastellaan useampia epäyhtälöitä, puhutaan epäyhtälöryhmästä. Epäyhtälöryhmän ratkaisuna on se tasoalue, jossa kaikki epäyhtälöt toteutuvat samanaikaisesti.

Epäyhtälöryhmän ratkaisemisessa kannattaa edetä seuraavasti:

1. Ratkaise kaikki epäyhtälöt y:n suhteen.
2. Päättele epäyhtälöistä tasoaluetta rajoittavien suorien yhtälöt ja piirrä suorat samaan koordinaatistoon.
3. Päättele epäyhtälöiden avulla, mikä on se tasoalue, jossa kaikki epäyhtälöt toteutuvat samanaikaisesti.
4. Tarkista ratkaisu valitsemalla tasoalueesta piste. Pisteen koordinaattien on toteutettava kaikki epäyhtälöt.
5. Ilmoita vastaus. Yleensä vastaukseksi riittää tasoalueen kuvaaja.

Esimerkki 3

Ratkaise epäyhtälöryhmä $\begin{cases} x > 0 \\ y < 3 \\ x - y < 2. \end{cases}$

Ratkaisu

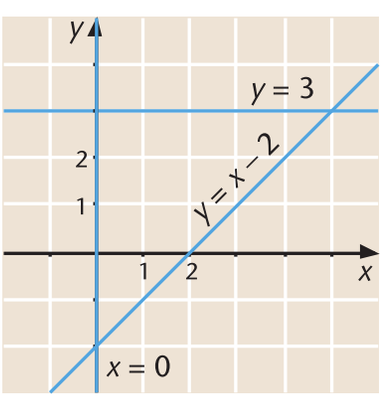
1 Kaksi ensimmäistä epäyhtälöä ovat yhden muuttujan epäyhtälöitä, jotka on jo ratkaistu. Ratkaistaan epäyhtälö $x - y < 2$ y:n suhteen.

$$\begin{aligned} x - y &< 2 \\ -y &< -x + 2 \quad \big| \cdot(-1) \\ y &> x - 2 \end{aligned}$$

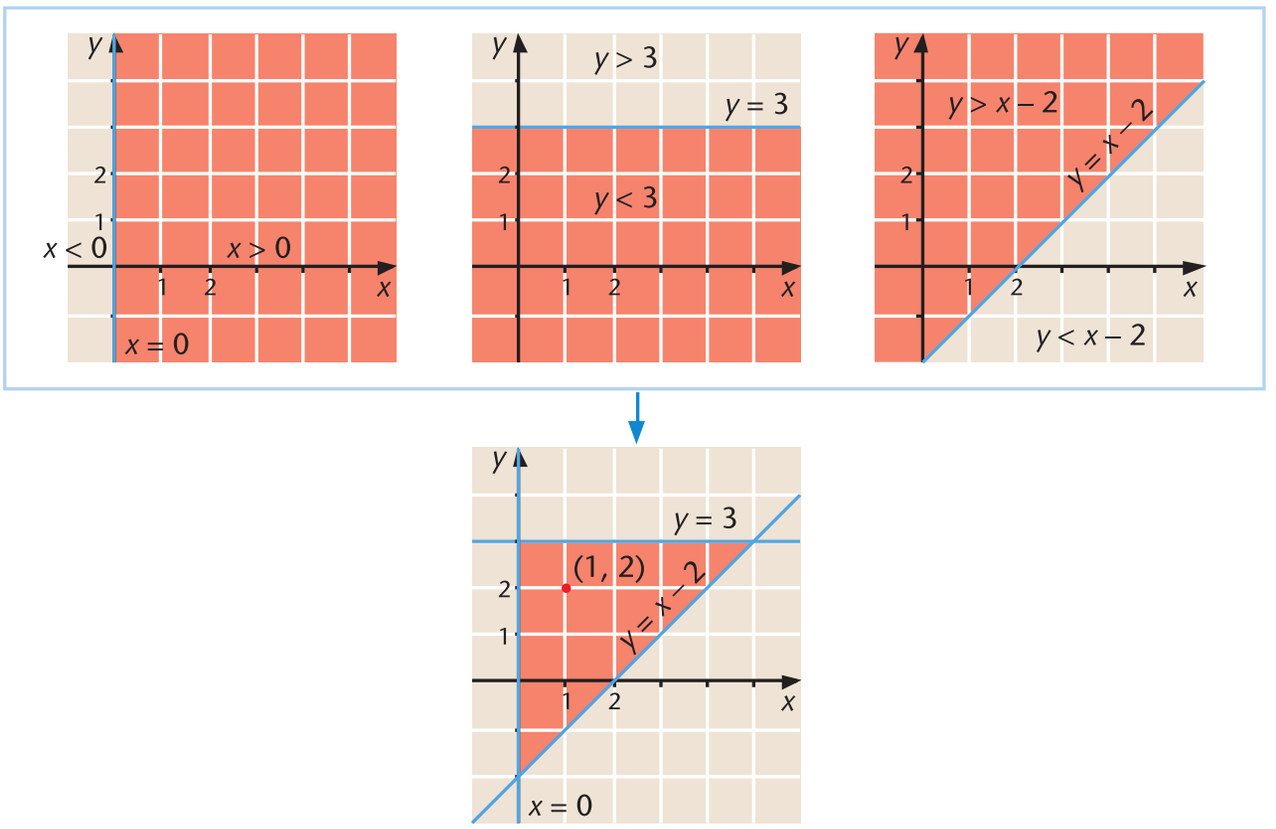
Epäyhtälömerkin suunta vaihtuu negatiivisella luvulla kerrottaessa.

2 Piirretään tasoaluetta rajoittavat suorat $x = 0$, $y = 3$ ja $y = x - 2$ samaan koordinaatistoon.

- Suora $x = 0$ on sama kuin y-akseli.
- Suora $y = 3$ on x-akselin suuntainen suora.



3 Päätellään epäyhtälöiden avulla, mikä on se tasoalue, jossa kaikki epäyhtälöt toteutuvat samanaikaisesti.



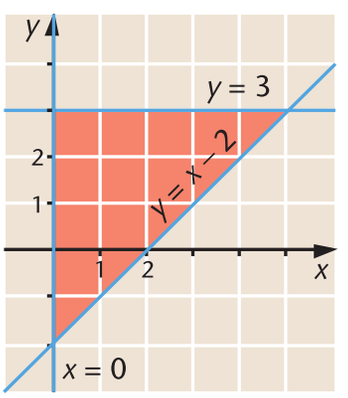
4 Valitaan tarkistuspisteeksi (1, 2). Tutkitaan, toteuttaako tämä piste kaikki epäyhtälöt.

Epäyhtälö	Toteutuuko epäyhtälö?	
$x > 0$	$1 > 0$	toteutuu
$y < 3$	$2 < 3$	toteutuu
$y > x - 2$	$2 > 1 - 2 = -1$	toteutuu

5 Kaikki epäyhtälöt toteutuvat pisteessä (1, 2), joten ratkaisuna on se suorien väliin jäävä tasoalue, jossa piste (1, 2) sijaitsee.

VASTAUS

Epäyhtälön ratkaisuna on kuvan tasoalue. Suorat eivät kuulu mukaan ratkaisuun.



ESIMERKKI 4

Pitopalvelu valmistaa yrityksen kevätriehaan pyttipannua ja makkarakeittoa. Heillä on käytettävissään ruokien valmistamiseen 90 kg perunaa ja 70 kg makkaraa. Yhteen pyttipannuannokseen tarvitaan 150 g perunaa ja 140 g makkaraa. Makkarakeittoannoksen valmistamiseen tarvitaan 120 g perunaa ja 70 g makkaraa. Tutki epäyhtälöiden avulla, millaiset määrät pyttipannuannoksia ja makkarakeittoannoksia pitopalvelu voi valmistaa. Piirrä tilanteesta kuvio.

RATKAISU

Merkitään muuttujalla x pyttipannuannosten määrää ja muuttujalla y makkarakeittoannosten määrää. Koska annosten määrät eivät voi olla negatiivisia lukuja, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$. Raaka-aineita annoksiin kuluu seuraavasti:

Annos	Annoksia (kpl)	Perunaa (kg)	Makkaraa (kg)
Pyttipannu	x	$0{,}15x$	$0{,}14x$
Makkarakeitto	y	$0{,}12y$	$0{,}07y$

Annoksiin kuluu perunoita yhteensä $0{,}15x + 0{,}12y$ ja makkaroita $0{,}14x + 0{,}07y$.

Annosten määriä rajoittavat yhteisten raaka-aineiden määrät:

- Perunat (90 kg) $\quad 0{,}15x + 0{,}12y \leq 90$
- Makkarat (70 kg) $\quad 0{,}14x + 0{,}07y \leq 70$

Ruoka-annoksia voidaan valmistaa siis sellaiset määrät x ja y, että epäyhtälöt

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0{,}15x + 0{,}12y \leq 90 \\ 0{,}14x + 0{,}07y \leq 70 \end{cases}$$

toteutuvat samanaikaisesti. Kun kahdesta jälkimmäisestä epäyhtälöstä ratkaistaan y, epäyhtälöryhmä voidaan esittää muodossa

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 750 - 1{,}25x \\ y \leq 1000 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0{,}15x + 0{,}12y &\leq 90 \\ 0{,}12y &\leq 90 - 0{,}15x \\ y &\leq 750 - 1{,}25x \end{aligned}$$

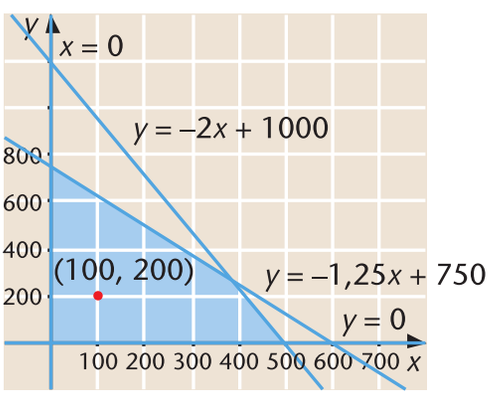
$$\begin{aligned} 0{,}14x + 0{,}07y &\leq 70 \\ 0{,}07y &\leq 70 - 0{,}14x \\ y &\leq 1000 - 2x \end{aligned}$$

Piirretään suorat $x = 0$, $y = 0$, $y = 750 - 1{,}25x$ ja $y = 1000 - 2x$ samaan koordinaatistoon. Koordinaattiakselien asteikon määrittämiseksi lasketaan kahden jälkimmäisen suoran ja akselien leikkauspisteet.

Suoran ja y-akselin leikkauspiste saadaan suoran vakiotermistä.

Suoran yhtälö	x-akselin leikkauspiste	y-akselin leikkauspiste
$y = 750 - 1{,}25x$	$750 - 1{,}25x = 0$ $-1{,}25x = -750 \quad \vert : (-1{,}25)$ $x = 600$ Leikkauspiste on (600, 0).	(0, 750)
$y = 1000 - 2x$	$1000 - 2x = 0$ $-2x = -1000 \quad \vert : (-2)$ $x = 500$ Leikkauspiste on (500, 0).	(0, 1000)

Päätellään epäyhtälöiden avulla ratkaisuna oleva tasoalue. Koska epäyhtälöissä on mukana yhtäsuuruus, myös suorat kuuluvat ratkaisuun.



Valitaan tarkistuspisteeksi (100, 200).

Epäyhtälö	Toteutuuko epäyhtälö?
$x \geq 0$	$100 \geq 0$ toteutuu
$y \geq 0$	$200 \geq 0$ toteutuu
$y \leq -2x + 1000$	$200 \leq -2 \cdot 100 + 1000 = 800$ toteutuu
$y \leq -1{,}25x + 750$	$200 \leq -1{,}25 \cdot 100 + 750 = 625$ toteutuu

VASTAUS Annoksia voi valmistaa määrät x ja y siten, että

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 750 - 1{,}25x \\ y \leq 1000 - 2x. \end{cases}$$

Tehtäviä

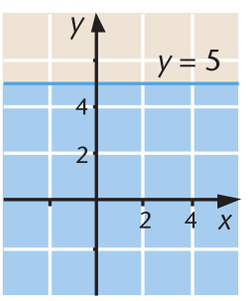
44. Esitä epäyhtälö koordinaatistossa.
a) $x > 0$ b) $y < 3$

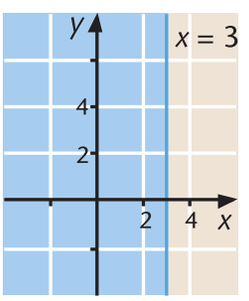
45. Esitä epäyhtälö koordinaatistossa.
a) $y \leq 2x + 8$ b) $y \geq -3x + 12$

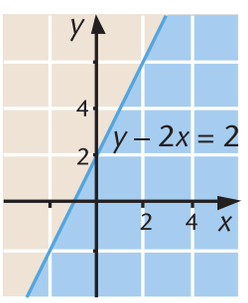
E1 46. Ratkaise epäyhtälö muuttujan y suhteen ja esitä epäyhtälö koordinaatistossa.
a) $4x + 2y > 0$ b) $3x - y < 2$

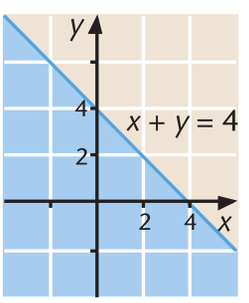
47. Ratkaise epäyhtälö muuttujan y suhteen ja esitä epäyhtälö koordinaatistossa.
a) $x - 5y > 10$ b) $x \geq 2 - y$

48. Ratkaise epäyhtälö muuttujan y suhteen ja esitä epäyhtälö koordinaatistossa.
a) $6x + y \geq 6 - 2y$ b) $x - 4y \geq 4 + 9x$

49. Minkä epäyhtälön ratkaisuna on seuraava tasoalue, kun suora kuuluu mukaan ratkaisuun?
a)


b)


50. Määritä sellainen epäyhtälö, jonka ratkaisuna on kuvan tasoalue. Suorat eivät kuulu mukaan ratkaisuun.
a)


b)


E2 51. Yhdistys jakaa nuorille tutkijoille apurahoja. Suurempi apuraha on 5000 € ja pienempi 2000 €. Yhdistys voi käyttää budjetistaan apurahoihin 45 000 €. Muodosta epäyhtälö, joka esittää apurahoihin käytettävää summaa ja esitä epäyhtälön graafinen ratkaisu.

52. Lounasravintolan päivän kalaruokina ovat uunilohi ja lohipasta. Uuniloheen tarvitaan yhteen annokseen 200 g kalaa. Yhteen pastaannokseen tarvitaan kalaa 100 g. Ravintola on tilannut kalaa yhteensä 12 kg. Muodosta epäyhtälö, joka kuvaa annoksiin kuluvia kalamääriä ja esitä epäyhtälön ratkaisu graafisesti.

53. Esitä epäyhtälöryhmä graafisesti.

a) $\begin{cases} y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y < 4 \\ x > -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 3x \end{cases}$

54. Mitkä tason pisteet toteuttavat epäyhtälöryhmän?

a) $\begin{cases} x + y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - y \leq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x - y \geq 1 \end{cases}$

55. Ratkaise epäyhtälöryhmä graafisesti.

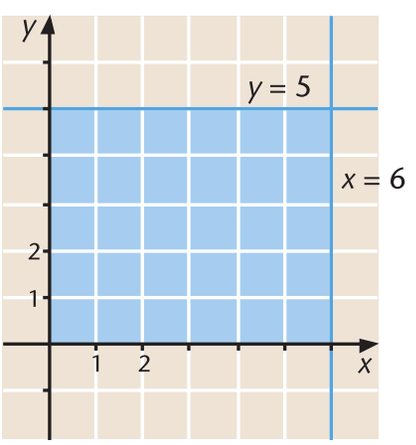
a) $\begin{cases} -4x + y \geq 2 \\ x + 2y \leq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 6y < 0 \\ y - 2x > 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y \leq 4x + 1 \\ y \leq -2x - 3 \end{cases}$

E3 56. Ratkaise epäyhtälö graafisesti.

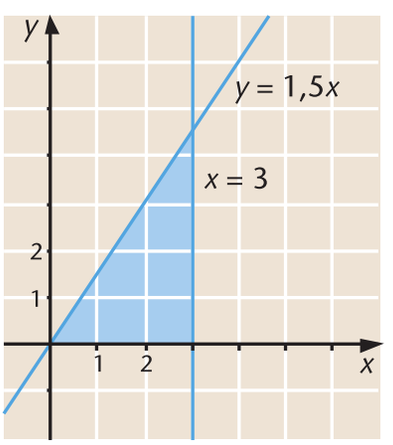
a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 8 \\ 4x - y \leq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ x - y \geq 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x < 3 \\ y > 1 \\ x + y < 6 \\ 2x - y > 0 \end{cases}$

57. Määritä sellainen epäyhtälöryhmä, jonka ratkaisuna on kuvan tasoalue (ilman reunoja).

a)

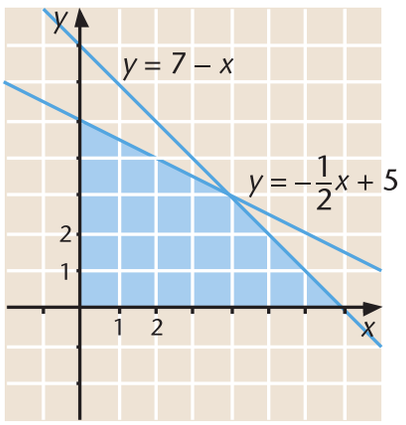


b)

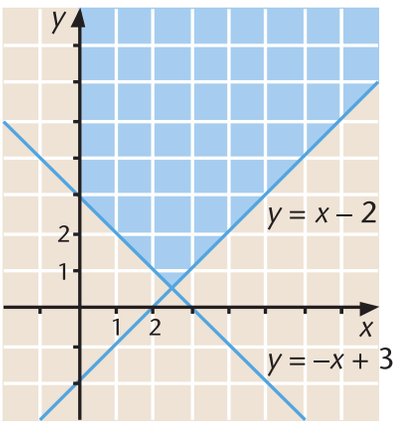


58. Mitkä epäyhtälöt rajoittavat kuvan tasoalueen, kun reunat kuuluvat mukaan tasoalueeseen?

a)



b)



59. Tasoaluetta rajoittavat suorat $x = 2$, $y = x$ ja $y + 3 = 0$. Piirrä alue ja kirjoita epäyhtälöt, jotka määrittävät kyseisen alueen (ilman reunoja). [S1996, 2a]

E4 60. Puutarhuri tekee kukkaistutuksia pyöreisiin ja neliönmuotoisiin ruukkuihin. Pyöreisiin ruukkuihin kuluu multaa 6 litraa ja koristekiviä 1,0 kg. Neliönmuotoisiin ruukkuihin hän laittaa multaa 8 litraa ja koristekiviä 1,8 kg. Tarkastele epäyhtälöiden avulla, millaisia määriä puutarhuri voi kumpiakin ruukkuistutuksia valmistaa, kun hänellä on käytössään multaa 200 litraa ja kiviä 40 kg. Piirrä kuvio.

61. Puusepänpajassa valmistetaan kahdenkokoisia laatikostoja. Laatikostojen valmistamiseen päätetään käyttää varastossa olevia materiaaleja. Laatikkoihin tulevia messinkivetimiä löytyy varastosta 200 kappaletta. Isompaan laatikostoon vetimiä tarvitaan 10 kappaletta, kun taas pienempään laatikostoon riittää 8 vedintä. Laatikostojen jalkoihin tarvittavaa puuta riittää 150 jalan valmistamiseen. Isompi laatikosto vaatii alleen kahdeksan jalkaa ja pienempi laatikosto neljä. Tarkastele epäyhtälöiden avulla, millaisia määriä kumpaakin laatikostoa puusepänpaja voi valmistaa. Piirrä kuvio.

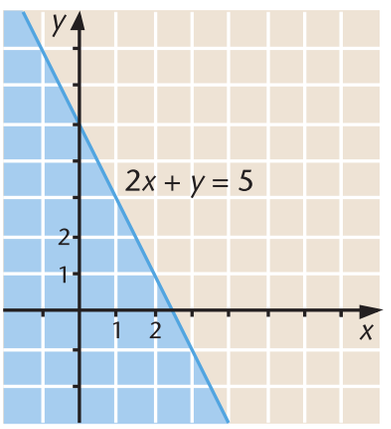
62. Olivialla on 320 samankokoista puuhelmeä, joista neljäsosa on sinisiä ja loput punaisia. Hän aikoo tehdä helmistä joululahjaksi kaula- ja rannekoruja. Yhden kaulakorun valmistamiseen kuluu 5 sinistä ja 30 punaista helmeä. Rannekoruun Olivia käyttää 4 sinistä ja 10 punaista puuhelmeä. Tarkastele epäyhtälöiden avulla, millaisia määriä kaulakoruja ja rannekoruja Olivia pystyy helmistä valmistamaan. Piirrä kuvio.

Sekalaisia tehtäviä

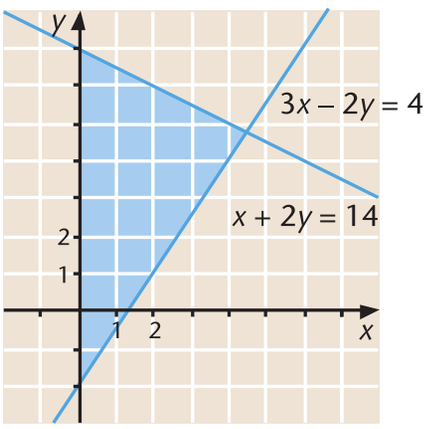
63. Ratkaise epäyhtälö. Esitä vastaus koordinaatistossa.
a) $x > 5$ b) $4x + 2y < 2$ c) $5x + y \geq 7x + 3y - 6$

64. Ratkaise epäyhtälöryhmä. Piirrä kuvio.
a) $\begin{cases} x > 0 \\ y < 3 \\ x > y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq 6 \\ 2x + y - 3 \leq 1 \end{cases}$

65. Määritä se epäyhtälö tai epäyhtälöryhmä, jonka ratkaisuna on kuvan tasoalue. Suorat eivät kuulu mukaan ratkaisuun.
a)



b)



66. Lääketehdas valmistaa päänsärkylääkkeitä. Ne myydään joko 25 tai 10 tabletin pakkauksissa. Yhden päivän aikana tabletteja valmistetaan enintään 6000 kappaletta. Muodosta epäyhtälö, joka esittää erikokoisten pakkausten mahdollisia määriä ja esitä ratkaisu graafisesti.

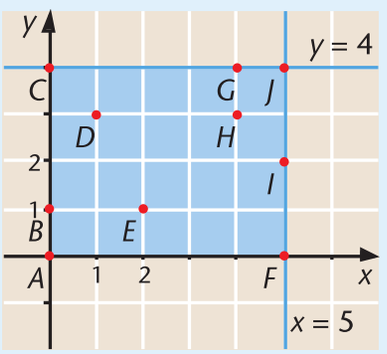
67. Akilla ja Turolla on NHL-keräilykortteja. Puolustajia on 60 kortissa ja hyökkääjiä 80 kortissa. Aki ja Turo muodostavat korteista kahdenlaisia kentällisiä: tasavoimakentällisiä, joissa on kolme hyökkääjää ja kaksi puolustajaa, sekä alivoimakentällisiä, joissa on kaksi hyökkääjää ja kaksi puolustajaa. Tarkastele epäyhtälöiden avulla, millaisia määriä eri kentällisiä pojat voivat muodostaa. Piirrä kuvio.

1.4 Lausekkeen arvo tasoalueessa

POHDINTA 1

Koordinaatistoon on kuvattu tasoalue, jota rajoittavat suorat

$y = 0$
$x = 0$
$y = 4$
$x = 5$.



Tarkastele taulukon avulla, mitä arvoja lauseke $3x + 2y$ saa koordinaatistoon kuvatun tasoalueen eri pisteissä.

Piste	Lausekkeen $3x + 2y$ arvo
$A(0, 0)$	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$
$B(0, 1)$	
$C(0, 4)$	
$D(1, 3)$	
$E(2, 1)$	
$F(5, 0)$	
$G(4, 4)$	
$H(4, 3)$	
$I(5, 2)$	
$J(5, 4)$	

Päättele taulukon perusteella, missä kuvatun tasoalueen pisteessä lauseke $3x + 2y$ saa

- suurimman arvonsa
- pienimmän arvonsa.

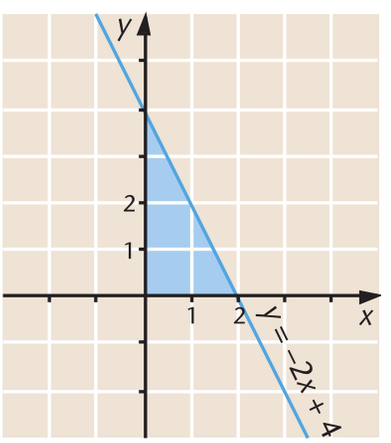
Kurssissa Matemaattinen analyysi tarkasteltiin polynomifunktion suurinta ja pienintä arvoa. Tällaisen funktion lausekkeessa esiintyi muuttujana vain yksi kirjain. Suurinta ja pienintä arvoa voidaan etsiä myös lausekkeelle, jossa on useampia muuttujia.

Kun tarkasteltava lauseke sisältää kaksi ensimmäisen asteen muuttujaa eli se on muotoa $ax + by + c$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$), puhutaan **lineaarisesta optimoinnista**.

Optimoinnilla tarkoitetaan yleensä mahdollisimman hyvän vaihtoehdon löytämistä. Optimointia sovelletaan erityisesti taloustieteiden puolella.

- Milloin yrityksen voitto on **mahdollisimman suuri**?
- Milloin tuotteen valmistuskustannukset ovat **mahdollisimman pienet**?

Tarkastellaan lausekkeen $-2x + y$ arvoja kuvan tasoalueessa. Muuttujien x ja y arvot voidaan siis valita tämän tasoalueen sisä- tai reunapisteistä.



Tasoaluetta rajoittavat epäyhtälöt

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $y \leq -2x + 4$.

Jos lausekkeen $-2x + y$ arvo on c, niin $-2x + y = c$.

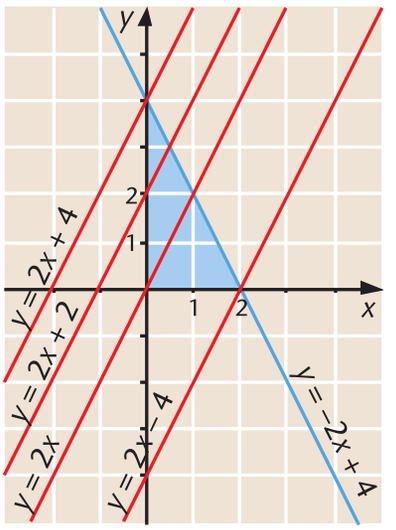
Tämä on suoran yhtälö, joka voidaan kirjoittaa ratkaistussa muodossa $y = 2x + c$.

On siis etsittävä suurin mahdollinen luku c, jolla suora $y = 2x + c$ kohtaa kolmionmuotoisen tasoalueen.

Tämän suoran kulmakerroin on 2 ja se leikkaa y-akselin pisteessä $(0, c)$.

Piirretään samaan koordinaatistoon muutamia suoria eri c:n arvoilla ja tarkastellaan suorien sijoittumista.

c	Suoran $y = 2x + c$ yhtälö
0	$y = 2x + 0$
2	$y = 2x + 2$
4	$y = 2x + 4$
–4	$y = 2x - 4$



- Kaikki suorat ovat yhdensuuntaisia, koska niillä on sama kulmakerroin.

- Suorat $y = 2x + 4$ ja $y = 2x - 4$ koskettavat tasoaluetta vain yhdessä pisteessä.

- Näiden suorien välissä kulkevilla suorilla ja tasoalueella on äärettömän monta yhteistä pistettä.

Suurin c:n arvo, jolla suora $y = 2x + c$ kohtaa tasoalueen, on siis $c = 4$.

Tällöin $-2x + y = 4$.

Lausekkeen $-2x + y$ suurin arvo tasoalueessa on siis 4 ja se saadaan alueen kärkipisteessä $(0, 4)$.

Vastaavalla tavalla voidaan löytää lausekkeen $-2x + y$ pienin arvo tasoalueessa. Pienin c:n arvo, jolla suora $y = 2x + c$ kohtaa tasoalueen on $c = -4$.

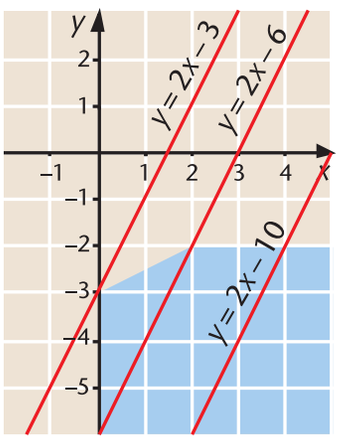
Tällöin $-2x + y = -4$.

Lausekkeen $-2x + y$ pienin arvo tasoalueessa on siis -4 ja se saadaan alueen kärkipisteessä $(2, 0)$.

Lineaarisessa optimoinnissa lauseke saa suurimman ja pienimmän arvonsa tarkasteltavan monikulmion kärkipisteissä. Siksi näissä optimointitehtävissä riittää, että lausekkeen arvot lasketaan vain monikulmion kärkipisteiden koordinaateilla.

Jos tarkasteltava tasoalue ei ole monikulmio, optimoitavalla lausekkeella ei välttämättä ole suurinta tai pienintä arvoa. Näissä tilanteissa lausekkeen arvoa on tarkasteltava vielä suorien avulla.

Esimerkiksi lausekkeella $-2x + y$ on suurin arvo kuvan tasoalueessa, mutta sillä ei ole pienintä arvoa.



Lausekkeen $-2x + y$ suurin arvo -3 saadaan kärkipisteessä $(0, -3)$. Kaikki suoran $y = 2x - 3$ alapuolelle jäävät suorat kulkevat tasoalueen poikki, jolloin vakiotermi voi pienentyä rajatta. Lausekkeella ei siis voi olla pienintä arvoa.

Kun ratkaistaan optimointitehtävää, voidaan edetä seuraavan ohjeen mukaan:

1. Muodosta epäyhtälöiden mukainen tasoalue koordinaatistoon.

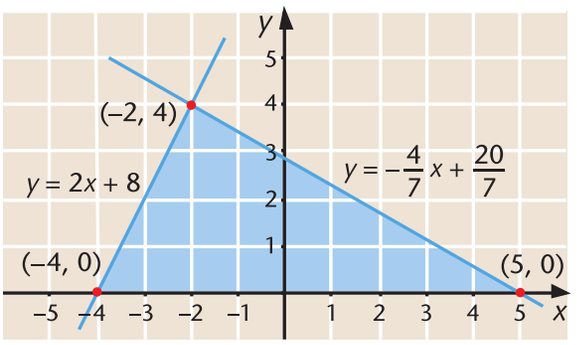
2. Laske muodostuneen tasoalueen kärkipisteiden koordinaatit. Suorien leikkauspisteitä muiden suorien ja x-akselin kanssa ei saa katsoa suoraan kuvaajasta, ellei kyseistä leikkauspistettä ole tehtävässä annettu.

3. Laske optimoitavan lausekkeen arvo tasoalueen kaikissa kärkipisteissä.

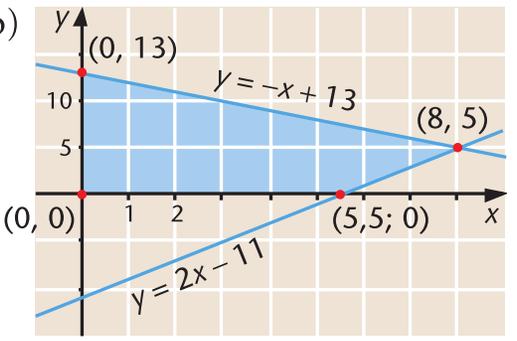
4. Ilmoita arvojen perusteella vastaus. Jos tasoalue ei ole monikulmio, optimoitavalla lausekkeella ei aina ole suurinta tai pienintä arvoa.

ESIMERKKI 1 Laske lausekkeen $5x - 2y$ suurin ja pienin arvo tasoalueessa.

a)



b)



RATKAISU

a) Lausekkeen $5x - 2y$ suurin ja pienin arvo voidaan määrittää tutkimalla lausekkeen arvoja tasoalueen kärkipisteissä. Alue on kolmio eli kärkipisteitä on kolme.

Piste	Lausekkeen arvo
(–4, 0)	5 · (–4) – 2 · 0 = –20
(–2, 4)	5 · (–2) – 2 · 4 = –18
(5, 0)	5 · 5 – 2 · 0 = 25

Pienin arvo, –20, saadaan kärkipisteessä (–4, 0).
Suurin arvo, 25, saadaan kärkipisteessä (5, 0).

b) Lasketaan lausekkeen arvot nelikulmion kärkipisteissä.

Piste	Lausekkeen arvo
(0, 0)	5 · 0 – 2 · 0 = 0
(0, 13)	5 · 0 – 2 · 13 = –26
(5,5; 0)	5 · 5,5 – 2 · 0 = 27,5
(8, 5)	5 · 8 – 2 · 5 = 30

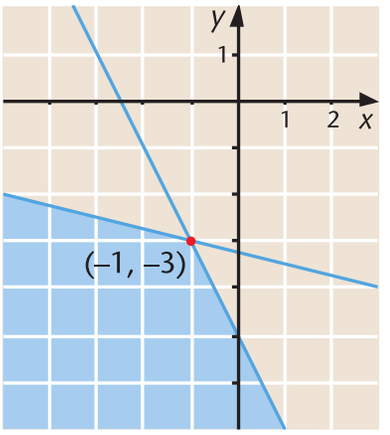
Pienin arvo, –26, saadaan nelikulmion kärkipisteessä (0, 13).
Suurin arvo, 30, saadaan kärkipisteessä (8, 5).

VASTAUS

a) suurin arvo 25, pienin arvo –20
b) suurin arvo 30, pienin arvo –26.

ESIMERKKI 2

Määritä lausekkeen $2y + x$ suurin ja pienin arvo kuvan tasoalueessa.



RATKAISU

Alue ei ole monikulmio, koska se on vasemmalta ja alhaalta rajoittamaton. Alueessa on kuitenkin yksi kärkipiste. Lausekkeen $2y + x$ arvo pisteessä $(-1, -3)$ on

$$2 \cdot (-3) + (-1) = -7$$

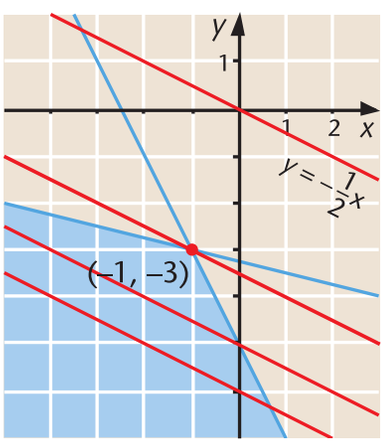
Ilman lisätarkastelua tästä arvosta ei voi sanoa, onko se suurin tai pienin arvo. Esimerkiksi alueen pisteissä $(-1, -4)$ ja $(-2, -5)$ lauseke saa arvot -9 ja -12, joten -7 voi olla suurin arvo.

Merkitään lausekkeen $2y + x$ arvoa tasoalueessa kirjaimella c. Tutkitaan suorien $2y + x = c$ joukkoa, jossa c on lausekkeen arvo. Tämän suoran yhtälö ratkaistussa muodossa on

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{c}{2}$$

Tämän suoran vakiotermi on $\frac{c}{2}$. Suora leikkaa siis y-akselin pisteessä $(0, \frac{c}{2})$. Lausekkeen arvo $2y + x$ on suurin silloin, kun vakiotermi $\frac{c}{2}$ on suurin. Kun lausekkeen arvo c on nolla, suora kulkee origon kautta eli $y = -\frac{1}{2}x$.

Origon kautta kulkeva suora ei kosketa tasoaluetta eikä sillä siis ole yhteisiä pisteitä alueen kanssa. Piirretään muutamia tämän suoran kanssa yhdensuuntaisia suoria.



Kaikista tasoaluetta koskettavista suorista suurin vakiotermin arvo on sillä suoralla, joka kulkee pisteen $(-1, -3)$ kautta. Pisteessä $(-1, -3)$ lauseke $2y + x$ saa siis suurimman arvonsa.

Kaikki edellisen suoran alapuolelle jäävät suorat kulkevat tasoalueen poikki. Vakiotermi voi siis pienentyä rajatta eikä lausekkeella voi olla pienintä arvoa.

VASTAUS

Suurin arvo on -7, pienintä arvoa ei ole.

ESIMERKKI 3 Suorat $y = x$ ja $y = -2x + 4$ rajoittavat y-akselin kanssa kolmion muotoisen tasoalueen. Laske lausekkeen $6x - 3y$ suurin ja pienin arvo tässä alueessa.

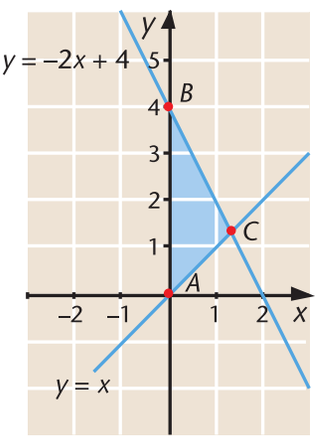
RATKAISU

1 Piirretään suorat $y = x$ ja $y = -2x + 4$ koordinaatistoon ja merkitään tasoalue kuvaan.

2 Ratkaistaan kärkipisteiden koordinaatit.

Kolmion kaksi kärkipistettä A ja B ovat suorien ja y-akselin leikkauspisteitä.
Ne saadaan suorien yhtälöistä:

$$A = (0, 0) \text{ ja } B = (0, 4)$$



Piste C on suorien leikkauspiste.
Se ratkaistaan yhtälöparilla sijoitusmenetelmää käyttäen.

$$\begin{cases} y = x \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -2x + 4 &= x \\ -3x &= -4 \qquad \big| : (-3) \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Kun $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, eli $C = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

3 Lasketaan lausekkeen $6x - 3y$ arvot kärkipisteissä.

Piste	Lausekkeen arvo
$B(0, 4)$	$6 \cdot 0 - 3 \cdot 4 = -12$
$A(0, 0)$	$6 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$
$C\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$	$6 \cdot \frac{4}{3} - 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$

Lauseke saa suurimman arvonsa 4 pisteessä C.
Lauseke saa pienimmän arvonsa -12 pisteessä B.

VASTAUS Suurin arvo on 4, pienin arvo -12.

ESIMERKKI 4 Laske lausekkeen $2x + y$ suurin arvo epäyhtälöiden $x + y \leq 2$, $2x \leq 3$, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ määrittelemässä tasoalueessa.

RATKAISU

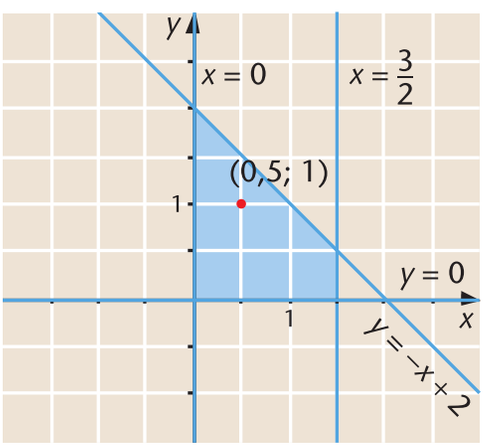
1 Määritetään epäyhtälöiden rajaama tasoalue.

Ratkaistaan epäyhtälö $x + y \geq 2$ y:n suhteen ja epäyhtälö $2x \geq 3$ x:n suhteen.

$$\begin{array}{l|l} x + y \leq 2 & 2x \leq 3 \quad |:2 \\ \quad y \leq 2 - x & \quad x \leq \frac{3}{2} \end{array}$$

Tasoaluetta rajoittavat siis suorat $y = -x + 2$, $x = \frac{3}{2}$, $x = 0$ ja $y = 0$.

Epäyhtälöiden perusteella päätellään se tasoalue, jossa kaikki epäyhtälöt toteutuvat.

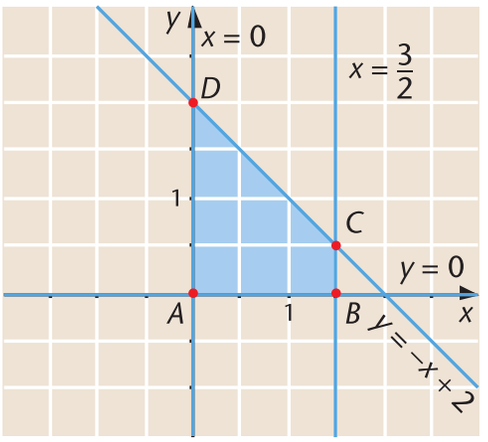


Valitaan tarkistuspisteeksi piste (0,5; 1) ja tarkastellaan epäyhtälöiden toteutumista tässä pisteessä.

Epäyhtälö	Toteutuuko epäyhtälö?	
$x + y \leq 2$	$0{,}5 + 1 = 1{,}5 \leq 2$	toteutuu
$2x \leq 3$	$2 \cdot 0{,}5 = 1 \leq 3$	toteutuu
$x \geq 0$	$0{,}5 \geq 0$	toteutuu
$y \geq 0$	$1 \geq 0$	toteutuu

Kaikki epäyhtälöt toteutuvat pisteessä (0,5; 1), joten tarkasteltava tasoalue on se suorien väliin jäävä alue, jossa piste (0,5; 1) sijaitsee. Lisäksi tasoalueen reunat sisältyvät mukaan.

2 Lasketaan nelikulmion kärkipisteiden koordinaatit.



Piste *A*
Pisteen koordinaatit ovat $(0, 0)$.

Piste *B*
Pisteen koordinaatit ovat $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Piste *C*

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 - x \end{cases}$$

Sijoitetaan muuttujan x arvo alempaan yhtälöön.

$$y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Pisteen koordinaatit ovat $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Piste *D*

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

Sijoitetaan muuttujan x arvo alempaan yhtälöön.

$$y = 2 - 0 = 2$$

Pisteen koordinaatit ovat $(0, 2)$.

3 Lasketaan optimoitavan lausekkeen arvo nelikulmion kärkipisteissä.

Kärkipiste	Lausekkeen $2x + y$ arvo
$A(0, 0)$	$2 \cdot 0 + 0 = 0$
$B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$	$2 \cdot \frac{3}{2} + 0 = 3$
$C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$
$D(0, 2)$	$2 \cdot 0 + 2 = 2$

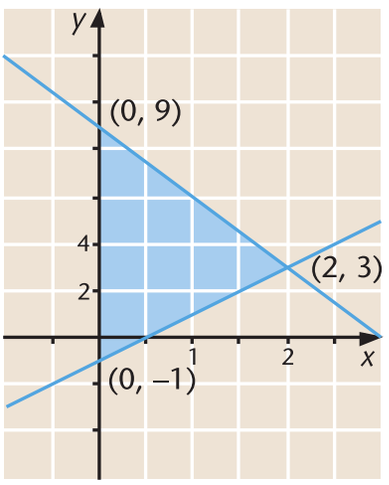
Lauseke $2x + y$ saa suurimman arvonsa pisteessä $C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Suurin arvo on $3\frac{1}{2}$.

VASTAUS Lausekkeen suurin arvo on $3\frac{1}{2}$.

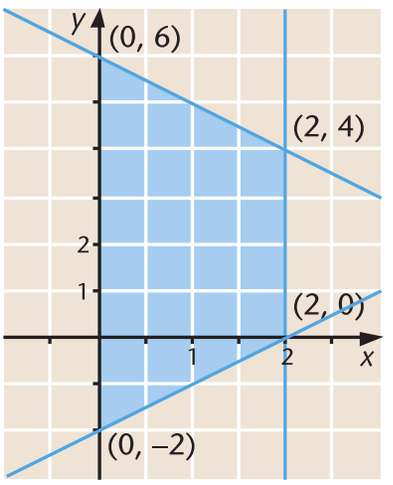
Tehtäviä

E1 68. Laske lausekkeen $3x + 5y$ suurin ja pienin arvo kuvan tasoalueessa.

a)

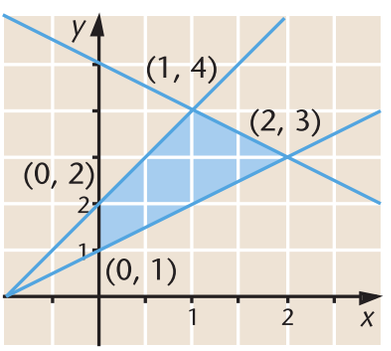


b)

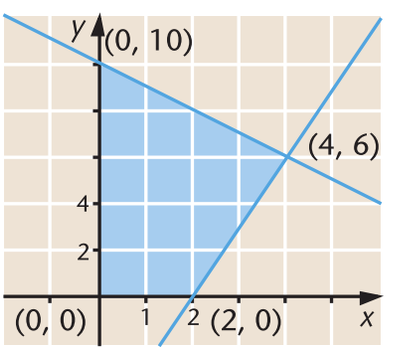


69. Laske lausekkeen $6x - 8y$ suurin ja pienin arvo kuvan tasoalueessa.

a)

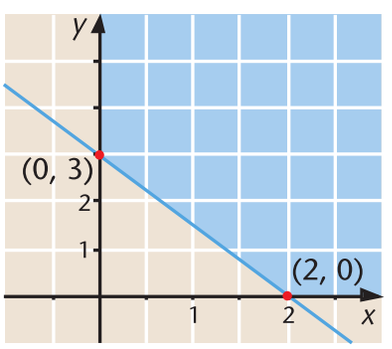


b)

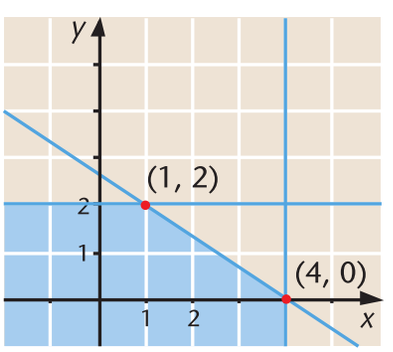


E2 70. Laske lausekkeen $2x + 5y$ suurin ja pienin arvo kuvan tasoalueessa.

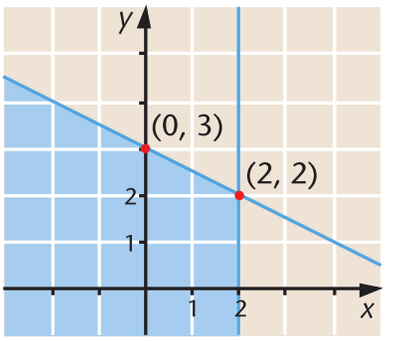
a)



b)



71. Laske lausekkeen $5x + y$ suurin ja pienin arvo kuvan tasoalueessa.



E3 72. Suorat $y = 2x$, $y = x + 3$ ja x-akseli rajoittavat yhdessä kolmion muotoisen tasoalueen. Laske lausekkeen $2y - 4x$ suurin ja pienin arvo tässä tasoalueessa.

73. Suora $y + 2x = 10$ rajoittaa yhdessä koordinaattiakselien kanssa tasoalueen. Missä tasoalueen pisteessä lauseke $-2x + 3y$ saa
a) suurimman arvonsa b) pienimmän arvonsa?

E4 74. Mikä on lausekkeen $5x - y$ suurin ja pienin arvo epäyhtälöiden $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 2x + 2$ ja $y + x \leq 5$ määräämässä tasoalueessa?

75. Laske lausekkeen $x + 9y$ suurin ja pienin arvo tasoalueessa, jonka rajaavat epäyhtälöt $y \leq 6$, $y + x \geq 6$ ja $x \leq 6$.

76. Laske lausekkeen pienin arvo tasoalueessa, jonka määräävät epäyhtälöt $x \geq 2$, $y \leq 8$ ja $y \geq 2x - 4$.
a) $9{,}1x - 8{,}4y$ b) $1{,}4x + 6{,}7y$

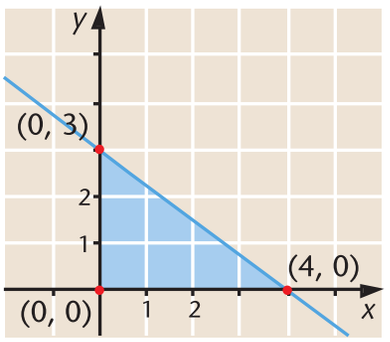
77. Missä epäyhtälöiden $x \geq 0$, $y \leq 0$, $y \leq -\frac{1}{2}x + 4$ ja $2y + 5x \leq 24$ määritelmän tasoalueen pisteissä lauseke $-0{,}25x + 2{,}15y$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa? Mitkä ovat nämä arvot?

78. Laske lausekkeen $4x + 2y$ suurin ja pienin arvo tasoalueessa, jonka määräävät epäyhtälöt $y \geq 0$, $y \geq -2x + 6$ ja $y \geq -x + 5$.

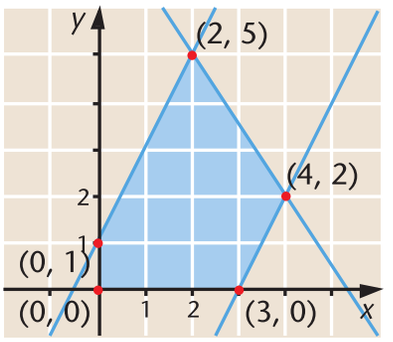
Sekalaisia tehtäviä

79. Määritä lausekkeen $4x - 5y$ suurin ja pienin arvo kuvan tasoalueessa.

a)



b)

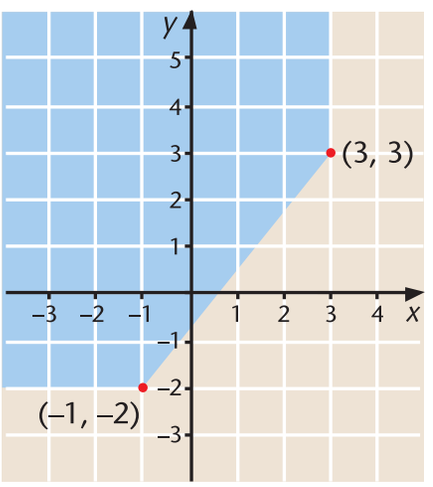


80. Suora $x = -3$, $y = 3x + 10$ sekä koordinaattiakselit rajoittavat koordinaatiston 2. neljänneksessä tasoalueen. Laske lausekkeen $-y - 4x$ suurin ja pienin arvo tässä alueessa.

81. Epäyhtälöt $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 20$ ja $y + 5x \leq 36$ määrittävät koordinaatistosta tason. Missä tason pisteessä lauseke $15x + 24y$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa? Mitkä ovat nämä arvot?

82. Laske lausekkeen $7x + 16y$ suurin ja pienin arvo epäyhtälöiden $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y - 3x \leq 1$ ja $y + 2x \leq 6$ määräämässä tasoalueessa.

83. Laske lausekkeen $y - 6x$ suurin ja pienin arvo kuvan tasoalueessa.



1.5 Sovelluksia lineaarisesta optimoinnista

POHDINTA 1

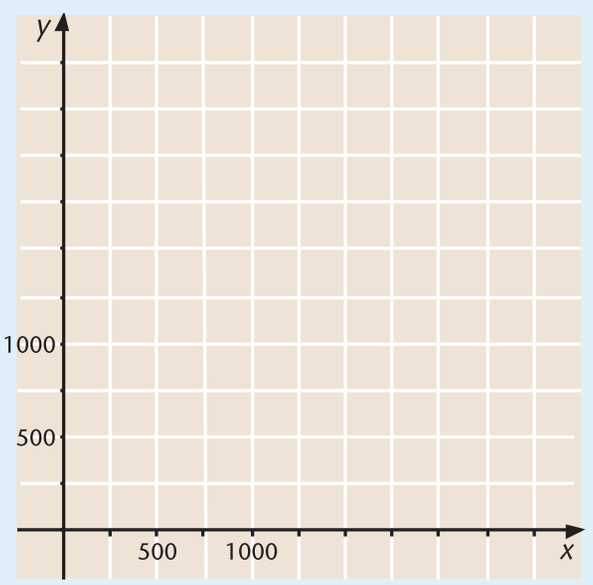
Urheiluseura myy kannatustuotteina sukkia ja T-paitoja. Seuran sukat maksavat 8 € pari ja T-paita 15 € kappale. Varastossa on sukkia x paria ja T-paitoja y kappaletta.

a) Urheiluseura arvioi myyvänsä kaikki varastossaan olevat sukat ja T-paidat. Muodosta lauseke, joka kuvaa kannatustuotteista saatavia myyntituloja.

b) Urheiluseuran varastotiloihin mahtuu säilytettäväksi enintään 2500 tuotetta. Millaisen rajoituksen tämä asettaa sukkien ja T-paitojen määrille?

c) Mitä muita rajoituksia on muuttujilla x ja y?

d) Kokoa rajoitukset epäyhtälöryhmäksi ja kuvaa epäyhtälöryhmän ratkaisu koordinaatistossa.



e) Määritä a-kohdassa muodostetun myyntituloja kuvaavan lausekkeen suurin arvo tasoalueessa.

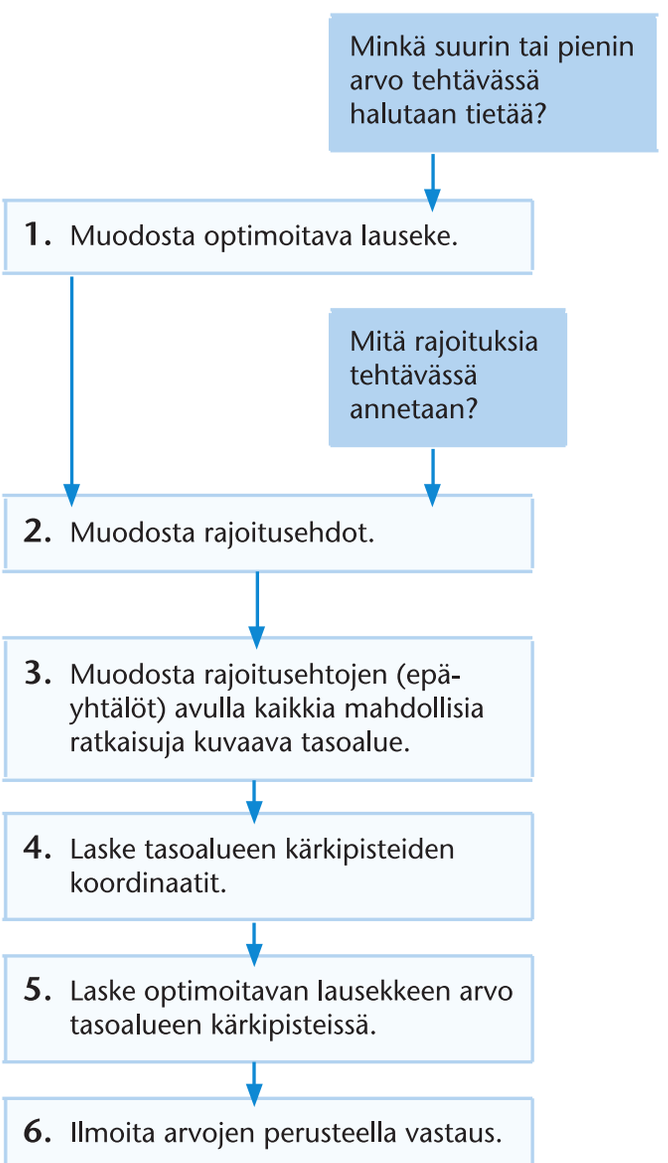
f) Kuinka paljon urheiluseuran kannattaa varastoida sukkia ja T-paitoja, jotta myyntitulot olisivat mahdollisimman suuret?

Sanallisissa sovellustehtävissä on useimmiten itse osattava muodostaa sekä optimoitava lauseke että tasoalueen määrittävät epäyhtälöt.

Optimoitava lauseke muodostetaan niiden tietojen avulla, minkä suurinta tai pienintä arvoa halutaan tietää. Lauseketta muodostettaessa on hyvä muistaa, että optimoitava lauseke sisältää aina kaksi ensimmäisen asteen muuttujaa.

Tarkasteltavan tasoaleen määrittäviä epäyhtälöitä kutsutaan **rajoitusehdoiksi**. Rajoitusehdot liittyvät usein käytettävissä oleviin resursseihin, kuten tarvikkeiden tai työtuntien määrään.

Optimointitehtävässä on erotettavissa selkeitä vaiheita. Tehtävän ratkaisussa kannattaa edetä seuraavan kaavion mukaan.



ESIMERKKI 1

Käsityöharrastaja valmistaa myyjäisiin myytäväksi kankaisia kauppakasseja ja patalappuja. Hän arvioi pystyvänsä käyttämään kuukauden aikana tuotteiden valmistamiseen korkeintaan 100 tuntia. Yhden patalapun valmistamiseen kuluu aikaa 0,3 tuntia ja yhden kauppakassin valmistamiseen 0,5 tuntia. Käsityöharrastaja aikoo tehdä tuotteen kotonaan olevista kankaanpaloista, joiden kokonaispinta-alan hän arvioi olevan 1000 dm^2. Yhden patalapun valmistamiseen kuluu kangasta yhteensä 8 dm^2 ja kauppakassin valmistamiseen 30 dm^2. Myyjäisissä kauppakassit myydään 5 euron hintaan ja patalaput 2 euron hintaan.

a) Muodosta optimoitava lauseke, kun kauppakassien ja patalappujen myynnistä saatavat myyntitulot halutaan mahdollisimman suuriksi.

b) Muodosta rajoitusehdot eli epäyhtälöryhmä, jonka epäyhtälöt kuvaavat patalappujen ja kauppakassien valmistusmääriin liittyviä ehtoja.

RATKAISU

a) Merkitään kauppakassien määrää kirjaimella $\boldsymbol{x}$ ja patalappujen määrää kirjaimella $\boldsymbol{y}$.

- Kauppakassien myynnistä saadaan $\boldsymbol{5x}$ euroa.
- Patalappujen myynnistä saadaan $\boldsymbol{2y}$ euroa.

Myyntitulot halutaan mahdollisimman suuriksi, joten optimoitava lauseke on tällöin $\boldsymbol{5x} + \boldsymbol{2y}$.

b) Koska sekä x että y kuvaavat myytävien tuotteiden lukumääriä, näiden muuttujien arvot eivät voi olla negatiivisia. Tällöin $\boldsymbol{x} \geq 0$ ja $\boldsymbol{y} \geq 0$.

Tuotteiden valmistamiseen oli varattu aikaa korkeintaan 100 tuntia.

- Kauppakassien valistamiseen kuluu aikaa $\boldsymbol{0{,}5x}$ tuntia.
- Patalappujen valmistamiseen kuluu aikaa $\boldsymbol{0{,}3y}$ tuntia.

Valmistusajasta saadaan rajoitusehto $\boldsymbol{0{,}5x} + \boldsymbol{0{,}3y} \leq 100$.

Kangasta tuotteiden valmistamiseen on käytettävissä 1000 dm^2.

- Kauppakassien valistamiseen kuluu kangasta $\boldsymbol{30x}$ dm^2.
- Patalappujen valmistamiseen kuluu kangasta $\boldsymbol{8y}$ dm^2.

Kankaan määrästä saadaan viimeinen rajoitusehto $\boldsymbol{30x} + \boldsymbol{8y} \leq 1000$.

VASTAUS

a) $5x + 2y$

b)
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0{,}5x + 0{,}3y \leq 100 \\ 30x + 8y \leq 1000 \end{cases}$$

ESIMERKKI 2

Yritys valmistaa kahdenlaisia hopeariipuksia, sydämiä ja palloja. Yhden sydänriipuksen hinta on 35 € ja palloriipuksen hinta 25 €. Yritys valmistaa sydämiä x kappaletta ja palloja y kappaletta.

a) Yritys arvioi myyvänsä kaikki valmistamansa riipukset. Muodosta korujen myyntituloja kuvaava lauseke.

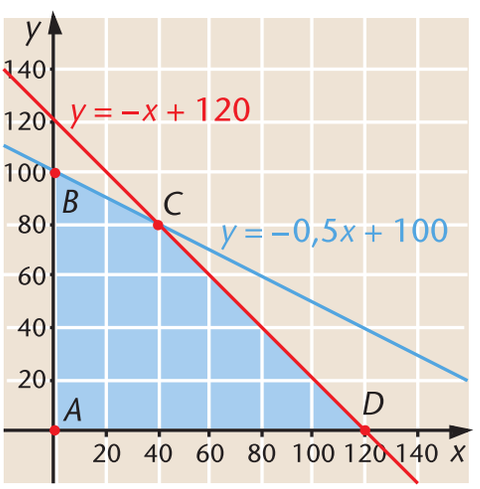
b) Riipusten tuotantomääriä x ja y rajoittavat epäyhtälöt $x \geq 0$, $y \leq 0$, $y \leq -\frac{1}{2}x + 100$ ja $y \leq -x + 120$. Kuinka monta sydänriipusta yrityksen kannattaa valmistaa, jotta sen korujen myynnistä saatavat tulot olisivat mahdollisimman suuret?

RATKAISU

a) Sydänriipusten myynnistä saadaan $35x$ euroa ja palloriipusten myynnistä $25y$ euroa, joten myyntitulot ovat yhteensä:

$$35x + 25y$$

b) Piirretään tasoalueen kuva koordinaatistoon.



Lasketaan monikulmion kärkipisteiden koordinaatit.

- Piste A on origo eli $(0, 0)$.
- Piste B on suoran $y = -\frac{1}{2}x + 100$ ja y-akselin leikkauspiste, joten $B(0, 100)$.

- Piste C on suorien leikkauspiste.

$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 100 \\ y = -x + 120 \end{cases}$

$$-\frac{1}{2}x + 100 = -x + 120$$

$$\frac{1}{2}x = 20 \qquad |\cdot 2$$

$$x = 40$$

Sijoitetaan $x = 40$ suoran $y = -x + 120$ yhtälöön.

$$y = -40 + 120 = 80$$

Pisteen C koordinaatit ovat $(40, 80)$.

- Piste D on suoran $y = -x + 120$ nollakohta.

$$-x + 120 = 0$$

$$x = 120$$

Pisteen D koordinaatit ovat $(120, 0)$.

Lasketaan optimoitavan lausekkeen arvo tasoalueen kärkipisteissä.

Piste	Lausekkeen $35x + 25y$ arvo
$A(0, 0)$	$35 \cdot 0 + 25 \cdot 0 = 0$
$B(0, 100)$	$35 \cdot 0 + 25 \cdot 100 = 2500$
$C(40, 80)$	$35 \cdot 40 + 25 \cdot 80 = 3400$
$D(120, 0)$	$35 \cdot 120 + 25 \cdot 0 = 4200$

Optimoitavan lausekkeen suurin arvo saadaan pisteessä $D(120, 0)$. Tällöin sydänriipuksia valmistetaan 120 kappaletta ja palloriipuksia ei valmisteta ollenkaan.

VASTAUS Sydänriipuksia kannattaa valmistaa 120 kappaletta.

ESIMERKKI 3

Noora osti jäätelötuutteja kesän juhliin. Hänellä oli käytössään tätä tarkoitusta varten 68,00 €. Jäätelötuutteja myytiin kahdessa pakkauksessa. Pienemmässä pakkauksessa oli 8 tuuttia hintaan 3,60 €. Suurempi jäätelöpakkaus sisälsi 10 tuuttia hintaan 5,00 €. Jäätelöpakkauksia myyvä kauppias oli rajoittanut tuuttien ostoa niin, että pakkauksia sai ostaa yhteensä korkeintaan 15 pakkausta/asiakas. Kuinka monta jäätelötuuttia Noora enimmillään saa ostettua?

RATKAISU

Koska tuuttien lukumäärä halutaan mahdollisimman suureksi, muodostetaan siitä optimoitava lauseke.

Merkitään ostettavien

- pienempien jäätelöpakkausten lukumäärää kirjaimella x
- isompien jäätelöpakkausten lukumäärää kirjaimella y.

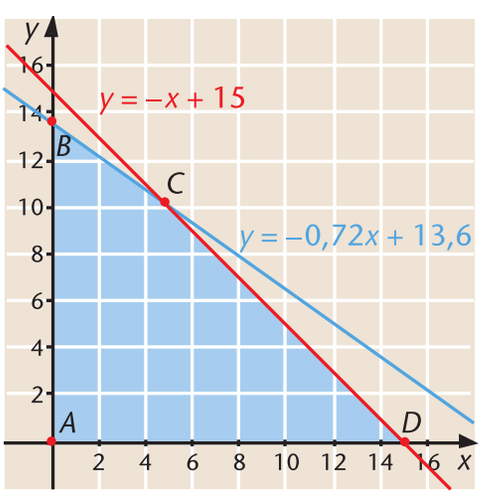
Jäätelöpakkauksissa on tällöin yhteensä jäätelöitä $8x + 10y$.

Muodostetaan rajoitusehdot.

- Koska muuttujat x ja y kuvaavat lukumääriä, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$.
- Rahaa oli käytettävissä yhteensä 68,00 €, joten $3{,}60x + 5{,}00y \leq 68{,}00$.
- Pakkauksia sai ostaa yhteensä korkeintaan 15 kappaletta, joten $x + y \leq 15$.

Piirtämistä varten ratkaistaan kaksi viimeistä epäyhtälöä y:n suhteen.

$$\begin{array}{l|l} x + y \leq 15 & 3{,}60x + 5{,}0y \leq 68{,}00 \\ \quad y \leq 15 - x & \quad 5{,}0y \leq 68{,}00 - 3{,}60x \quad |:5{,}0 \\ & \quad\quad y \leq 13{,}6 - 0{,}72x \end{array}$$



Ratkaistaan kärkipisteiden koordinaatit.

- Piste A on origo eli $(0, 0)$.
- Piste B on suoran $y = 13{,}6 - 0{,}72x$ ja y-akselin leikkauspiste, joten $B = (0; 13{,}6)$.
- Piste C on suorien leikkauspiste.

$\begin{cases} y = 13{,}6 - 0{,}72x \\ y = 15 - x \end{cases}$

$$\begin{aligned} 13{,}6 - 0{,}72x &= 15 - x \\ 0{,}28x &= 1{,}4 \qquad \vert : 0{,}28 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 5$ suoran $y = 15 - x$ yhtälöön.

$$y = 15 - 5 = 10$$

Pisteen C koordinaatit ovat $(5, 10)$.

- Piste D on suoran $y = 15 - x$ nollakohta.

$$\begin{aligned} 15 - x &= 0 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Pisteen D koordinaatit ovat $(15, 0)$.

Lasketaan optimoitavan lausekkeen arvo tasoalueen kärkipisteissä.

Piste	Lausekkeen $8x + 10y$ arvo
$A(0, 0)$	$8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0$
$B(0; 13{,}6)$	$8 \cdot 0 + 10 \cdot 13{,}6 = 136$
$C(5, 10)$	$8 \cdot 5 + 10 \cdot 10 = 140$
$D(15, 0)$	$8 \cdot 15 + 10 \cdot 0 = 120$

Optimoitavan lausekkeen suurin arvo saadaan pisteessä $C(5, 10)$. Tällöin pienempiä jäätelöpakkauksia ostetaan 5 kappaletta ja suurempia jäätelöpakkauksia 10 kappaletta.

VASTAUS

Nooran kannattaa ostaa pienempiä pakkauksia 5 kappaletta ja suurempia pakkauksia 10 kappaletta.

Tehtäviä

E1 84. Pitopalvelu järjestää kesäjuhlille lounaan. Lounaaksi on suunniteltu tomaatti-sipulisalaattia ja tomaatti-sipulikeittoa, joista ruokailija valitsee toisen vaihtoehdon. Yritys on ostanut varastoon 240 kg tomaatteja ja 300 kg sipulia. Yhteen salaattiannokseen kuluu 300 g tomaattia ja 200 g sipulia. Keittoannokseen kuluu 150 g tomaattia ja 300 g sipulia. Yhden salaattiannoksen hinta on 5,90 € ja keittoannoksen 4,10 €. Salaattiannoksia valmistetaan x kappaletta ja keittoannoksia y kappaletta.

a) Muodosta optimoitava lauseke, kun annosten myynnistä saatavat myyntitulot halutaan mahdollisimman suuriksi.

b) Muodosta rajoitusehdot, jotka kuvaavat annosten valmistusmääriin liittyviä ehtoja.

85. Yrityksellä on jäänyt varastoon lojumaan 52,00 metriä raidallista ja 29,70 metriä yksiväristä trikookangasta. Niistä päätetään valmistaa T-paitoja ja sortseja. Vaatteiden valmistamiseen käytetään sekä raidallista että yksiväristä kangasta. Raidallista kangasta kuluu yhteen T-paitaan 80 cm ja sortseihin 20 cm. Yksiväristä kangasta kuluu T-paitaan 30 cm ja sortseihin 50 cm. T-paidat myydään 15 euron kappalehintaan ja sortsit 20 euron kappalehintaan.

a) Muodosta optimoitava lauseke, kun tuotteiden myynnistä halutaan mahdollisimman suuret myyntitulot.

b) Muodosta rajoitusehdot.

E2 86. Kalastaja valmistaa kalastustapahtumaan kahdenlaisia perhoja kanan höyhenistä. Kalastaja myy pienempiä perhoja 4,00 euron hintaan ja suurempia perhoja 9,50 eurolla.

a) Kalastaja arvioi myyvänsä pienempiä perhoja x kappaletta ja suurempia perhoja y kappaletta. Muodosta perhojen myyntituloja kuvaava lauseke.

b) Perhojen valmistusmääriä rajoittavat epäyhtälöt: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 70 - \frac{1}{3}x$ ja $y \leq 100 - x$. Kuinka monta pientä perhoa kalastajan kannattaa valmistaa, jotta hänen perhojen myynnistä saamansa myyntitulot olisivat mahdollisimman suuret?

87. Asuntotuotantoon erikoistunut yritys rakentaa kerrostalon. Taloon suunnitellaan rakennettavaksi asuntoja kahden henkilön asunnoiksi sekä suurempia perheasuntoja neljän henkilön asunnoiksi. Kaksion rakentamiskustannuksiksi arvioidaan 25 000 €/asunto ja perheasunnon kustannuksiksi 40 000 €/asunto.
   a) Yritys rakentaa x kappaletta kaksioita ja y kappaletta perheasuntoja. Muodosta lauseke, joka kuvaa asuntojen rakentamisesta aiheutuvia rakennuskustannuksia.
   b) Asuntojen rakennusmääriä rajoittavat epäyhtälöt $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \geq -\frac{1}{2}x + 15$ ja $y \geq 20 - x$. Kuinka monta perheasuntoa kerrostaloon kannattaa rakentaa, jotta talon rakennuskustannukset jäisivät mahdollisimman pieniksi?

88. Autolautta perii lauttamatkalla henkilöautosta 50 € ja rekasta 140 €. Autolauttaan lastataan x henkilöautoa ja y rekkaa.
   a) Muodosta lauseke, joka kuvaa yhdestä lauttamatkasta saatavaa myyntituloa.
   b) Oletetaan henkilöauton keskipainoksi 1 tn ja rekan keskipainoksi 25 tn. Lauttaan lastattujen ajoneuvojen enimmäispaino voi olla 550 tn. Muodosta tilanteeseen liittyvä rajoitusehto.
   c) Autokansilla on tilaa 1000 m^2. Yhdelle henkilöautolle on varattava tilaa 10 m^2 ja rekalle 25 m^2. Muodosta tilanteeseen liittyvä rajoitusehto.
   d) Millaisia määriä erilaisia ajoneuvoja kannattaa lauttaan lastata, jotta laivayhtiö saisi lauttamatkasta mahdollisimman suuret myyntitulot?

E3 89. Maiju tekee kahdenlaisia kukkakimppuja pellon reunasta keräämistään kukista. Pienempään kimppuun hän laittaa 5 päivänkakkaraa ja 6 kissankelloa. Suurempaan kimppuun Maiju laittaa 10 päivänkakkaraa ja 8 kissankelloa. Yhteensä kimppujen tekemiseen Maijulla on käytössä 120 päivänkakkaraa ja 100 kissankelloa. Kimput hän myy kesätorilla. Pienemmän kimpun hinta on 3,50 € ja suuremman 4,80 €. Kuinka monta kappaletta kumpaakin kimppua Maijun kannattaa tehdä, jotta myyntitulot olisivat mahdollisimman suuret? Oletetaan, että kaikki kimput menevät kaupaksi.

90. Kotileipomo valmistaa kahta luomutuotetta, terveyspullia ja terveyssämpylöitä. Kymmenen terveyspullan taikinaan tarvitaan 300 g luomuvehnäjauhoja ja 150 g luomuohrajauhoja, kun taas kymmenen sämpylän taikinaan kuluu 100 g samoja vehnä- ja 400 g ohrajauhoja. Leipomolla on 30 kg vehnäjauhoja ja 36 kg ohrajauhoja. Terveyspullan tuotto leipomolle on 0,45 € ja terveyssämpylän 0,25 €. Kuinka paljon kumpaakin tuotetta leipomon tulisi valmistaa, jotta tuotto olisi suurin mahdollinen? Miten käy jauhovaraston, jos valmistetaan vain terveyssämpylöitä? [S2003, 12]

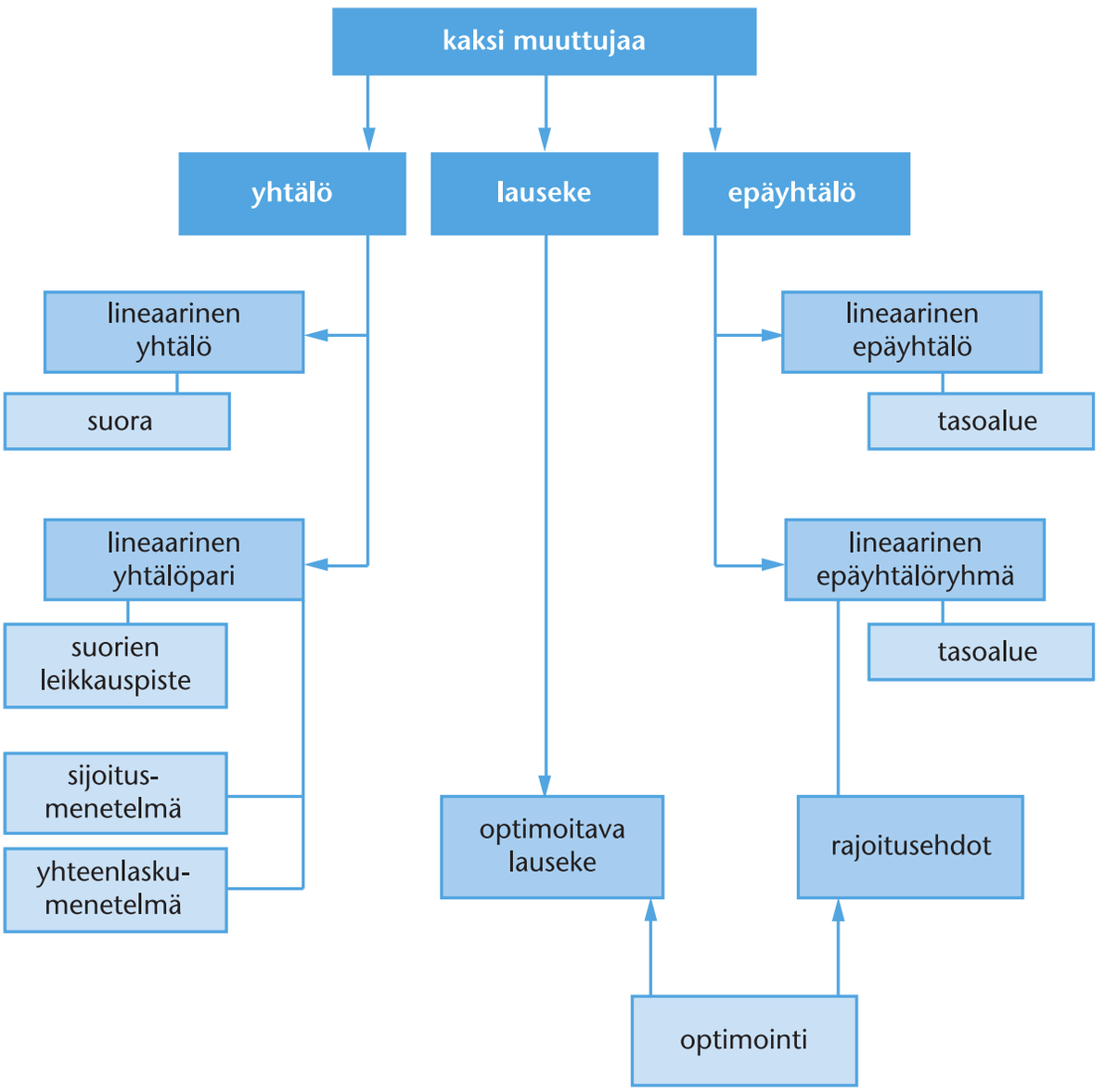
Sekalaisia tehtäviä

91. Leipuri valmistaa 8 tunnin työpäivän aikana sekä mustikka- että puolukkapiirakoita. Oletetaan, että leipuri käyttää koko työpäivän piirakoiden tekemiseen. Yhteen puolukkapiirakkaan kuluu valmista taikinaa 200 grammaa. Mustikkapiirakkaan taikinaa tarvitaan 350 g. Valmista taikinaa on yhteensä käytössä 7,5 kg. Puolukkapiirakan valmistamiseen (ilman piirakan paistoaikaa) leipurilta kuluu 15 minuuttia. Mustikkapiirakka syntyy 20 minuutissa. Leipuri myy puolukkapiirakat 8,50 euron kappalehintaan ja mustikkapiirakat hintaan 12,50 €/kappale.
   a) Muodosta optimoitava lauseke, kun leipuri haluaa piirakoiden myyntitulot mahdollisimman suuriksi.
   b) Muodosta rajoitusehdot.

92. Lyhyttä kotimaanreittiä varten suunnitellaan pienkonetta. Pienkoneen matkustajapaikoista x kappaletta on liikemiesluokan paikkoja ja y kappaletta turistiluokan paikkoja. Liikemiesluokan paikan rakennuskustannukset ovat 800 € ja turistiluokan paikan rakennuskustannukset 50 €.
   a) Muodosta lauseke, joka kuvaa pienkoneen matkustajapaikkojen rakentamisesta aiheutuvia kustannuksia.
   b) Matkustajapaikkojen lukumääriä rajoittavat seuraavat epäyhtälöt: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \geq -\frac{3}{2}x + 25$ ja $y \leq 70 - x$. Yhtiö haluaa minimoida rakennuskustannukset. Miten pienkoneen matkustajapaikat kannattaa tällöin jakaa?

93. Ompeluseuralla on ruskeaa villalankaa 7,2 kg ja vihreää villalankaa 4,8 kg. Seura neuloo niistä kahdenlaisia villapaitoja. Uusikuosiseen villapaitaan menee 400 g ruskeaa ja 400 g vihreää lankaa. Vanhakuosiseen villapaitaan menee 600 g ruskeaa ja 200 g vihreää lankaa. Myyjäisissä saa uusikuosisesta villapaidasta 120 € ja vanhakuosisesta 100 €. Mikä on villapaitamyynnin suurin arvo, ja kuinka monta uusi- ja vanhakuosista villapaitaa siihen on neulottava? [mukailtu K1997, 8c]

Keskeisiä käsitteitä



2 Lukujonot ja summat

2.1 Lukujono

POHDINTA 1

Kauppias jakoi asiakkailleen arpalippuja. Päivän ensimmäinen asiakas sai 4 arpaa, toinen asiakas 8 arpaa ja kolmas asiakas 12 arpaa.

a) Kuinka monta arpaa saivat kaupan neljäs ja viides asiakas?

b) Kuinka monta arpaa sai kaupan 10. asiakas?

c) Kuinka monta arpaa sai kaupan *n*. asiakas?

POHDINTA 2

Jatka seuraavia lukujonoja kahdella luvulla. Minkä säännön mukaan puuttuvat luvut voidaan päätellä?

a)	1	3	5			
b)	2	6	10			
c)	2	6	18			
d)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$			
e)	500	100	20			
f)	3	9	27			
g)	–5	25	–125			

Eräässä kaupungissa oli vuoden 2014 alussa 32 000 asukasta. Asukkaiden määrän arvioitiin kasvavan lähivuosina 500 asukkaalla vuosittain.

	Asukasmäärä
2014	32 000
2015	32 000 + 500 = 32 500
2016	32 500 + 500 = 33 000
2017	33 000 + 500 = 33 500
2018	33 500 + 500 = 34 000
2019	34 000 + 500 = 34 500

Kaupungin asukasmäärät muodostavat **lukujonon**

32 000, 32 500, 33 000, 33 500, 34 000, 34 500 (asukasta).

Jos asukkaiden määrän kasvun oletetaan jatkuvan vuosittain samana, kaupungin asukasluvulle voidaan muodostaa malli. Tämän mallin avulla voidaan tehdä ennusteita kaupungin tulevasta asukasluvusta.

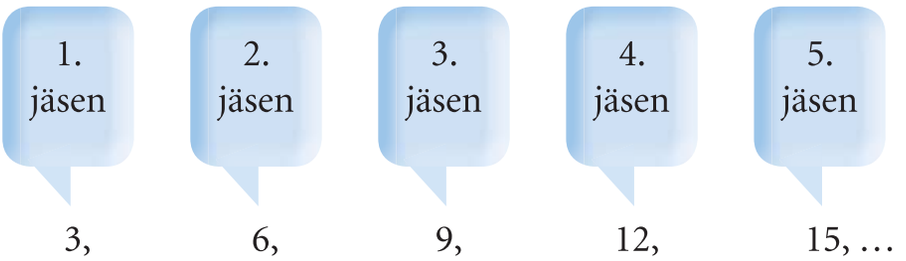
Lukujonoja voidaan soveltaa esimerkiksi
- taloustieteissä (lainalaskenta ja talletukset)
- tekniikassa (signaalin käsittely)
- kuvataiteissa ja arkkitehtuurissa (kultainen leikkaus).

Kun lukuja asetetaan peräkkäin, muodostuu lukujono. Lukujono voi olla **päättyvä** eli **äärellinen**, jos sen pituus on rajattu. Tällöin lukujonon kaikki luvut voidaan kirjoittaa näkyviin ja jonossa on viimeinen luku. Jos jonossa ei ole olemassa viimeistä lukua, se on **päättymätön** eli **ääretön**. Tällaisen jonon kaikkia lukuja ei voida kirjoittaa näkyviin.

Päättyvä jono	Päättymätön jono
2, 4, 6, 8 • Jonossa on neljä lukua. 10, 20, 30, ... , 150, 160 • Jonossa on 16 lukua. • Kaikkia jonon keskellä olevia lukuja ei tarvitse kirjoittaa näkyviin.	3, 6, 9, 12, 15, ... • Jonossa on ääretön määrä lukuja. • Kolme pistettä lukujonon perässä tarkoittaa, että jono jatkuu. • Kaikkia lukuja ei voida kirjoittaa näkyviin.

Lukujonon lukuja kutsutaan jonon **jäseniksi** tai **termeiksi**. Lukujonon 3, 6, 9, 12, 15, … jäseniä ovat siis esimerkiksi 3 ja 6.

Jokaisella jonon luvulla on määrätty järjestysnumero, joka kertoo, kuinka mones jäsen (termi) kyseinen luku on jonossa.



Jonon jäsen voidaan merkitä esimerkiksi kirjaimen a avulla seuraavasti:

- jonon 1. jäsen $a_1 = 3$
- jonon 2. jäsen $a_2 = 6$
- jonon 3. jäsen $a_3 = 9$.

Jäsenen järjestysnumero merkitään a-kirjaimen oikeaan alareunaan alaindeksiksi.

Jonolle halutaan yleensä ilmoittaa **yleinen jäsen a_n**. Se kertoo säännön, jonka mukaan jonon jäsenet muodostuvat. Sääntö ilmoitetaan yleensä lausekkeena, jossa esiintyy jäsenen järjestysnumero n. Luku n voi saada vain positiivisia kokonaislukuarvoja eli $n = 1, 2, 3, \ldots$

Lausekkeen määrittämiseen tarvitaan usein myös jonon ensimmäinen jäsen a_1.

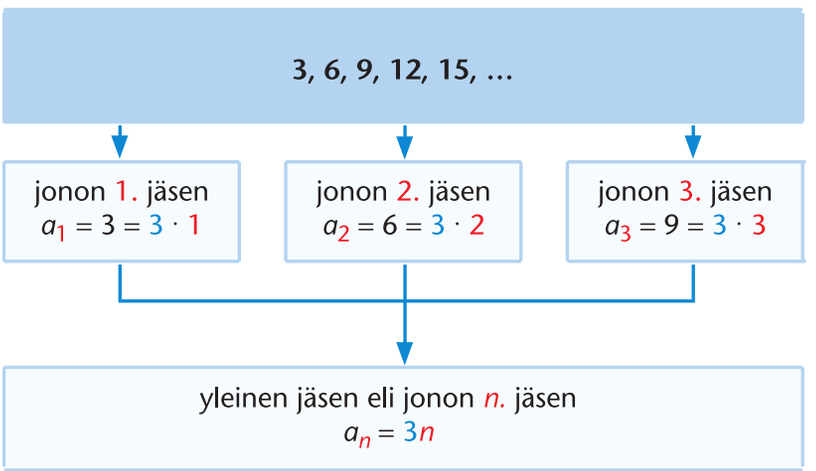
Lukujono

Kun lukuja asetetaan peräkkäin, muodostuu lukujono.

- Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ yleinen jäsen on a_n, jossa n on jäsenen järjestysnumero.
- Yleisen jäsenen avulla voidaan määrittää mikä tahansa lukujonon jäsen.

Lukujonon yleinen jäsen voidaan usein päätellä lukujonon ensimmäisten jäsenten avulla. Tämän vuoksi ensimmäisiä jäseniä kannattaa yrittää kirjoittaa niiden järjestysnumeron avulla.

Tarkastellaan lukujonoa 3, 6, 9, 12, 15, … . Periaatteessa jono voisi tietysti jatkua miten tahansa, mutta seuraava säännönmukaisuus on helpoimmin havaittavissa:



Jonon 3, 6, 9, 12, 15,… muodostavat kolmella jaolliset luonnolliset luvut. Jonon yleinen jäsen on $a_n = 3n$.

Yleisen jäsenen avulla voidaan määrittää, mikä luku sijaitsee jonossa paikalla n. Kun halutaan tietää, mikä on esimerkiksi jonon 120. luku, jäsenen järjestysnumero (120) sijoitetaan yleisen jäsenen lausekkeeseen kirjaimen n paikalle.

$$a_{120} = 3 \cdot 120 = 360$$

Yleisen jäsenen avulla voidaan myös tutkia, onko jokin luku lukujonon jäsen. Jos luku on jonon jäsen, sillä on määrätty paikka jonossa.

$a_n = 3n$	
Luku 321 on jonon jäsen:	Luku 481 ei ole jonon jäsen:
$3n = 321 \quad \vert : 3$ $n = 107$	$3n = 481 \quad \vert : 3$ $n = 160{,}333\ldots$
$a_{107} = 321$	n voi saada arvoksi vain positiivisen kokonaisluvun.

ESIMERKKI 1 Määritä jonon 50. jäsen, kun jonon yleinen jäsen on

a) $a_n = 2n - n^2$ b) $a_n = 4 \cdot (-1)^n - 1$.

RATKAISU Jonon 50. jäsen lasketaan sijoittamalla $n = 50$ yleisen jäsenen lausekkeeseen.

a) $a_{50} = 2 \cdot 50 - 50^2$
$= 100 - 2500$
$= -2400$

b) $a_{50} = 4 \cdot (-1)^{50} - 1$
$= 4 \cdot 1 - 1$
$= 3$

VASTAUS a) $a_{50} = -2400$ b) $a_{50} = 3$

ESIMERKKI 2 Legendan mukaan shakin keksijä oli intialainen matemaatikko Sissa. Hän esitteli pelin kuninkaalle, joka ihastui siihen suuresti ja lupasi Sissalle palkkion. Sissa pyysi palkkioksi sen määrän vehnänjyviä, joka saadaan, kun pelilaudan ensimmäiselle ruudulle laitetaan yksi jyvä, toiselle kaksi, kolmannelle neljä ja niin edelleen: jokaiselle ruudulle aina kaksinkertainen määrä edelliseen ruutuun verrattuna. Vehnänjyvien määrät ruuduissa muodostavat lukujonon.

a) Laske tämän jonon neljäs, viides ja kuudes jäsen.
b) Jyvien määrän ruudussa n ilmoittaa jonon yleinen jäsen a_n. Päättele yleinen jäsen.
c) Laske yleisen jäsenen avulla, montako jyvää tarvitaan viimeisessä, 64. ruudussa.

RATKAISU

a) Koska jyvien määrä kaksinkertaistuu joka ruudussa ja $a_1 = 1$ ja $a_2 = 2$,

$a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 = 4$
$a_4 = 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$
$a_5 = 2 \cdot a_4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
$a_6 = 2 \cdot a_5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$

b) Jyvien määrät ovat luvun 2 potensseja. Esimerkiksi kuudennessa ruudussa olisi jyviä $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$. Eksponentti on siis aina yhtä pienempi kuin ruudun numero.

Kun ruudun numero on n, jyvien määrä ruudulla on aina 2^{n-1} eli $a_n = 2^{n-1}$.

c) Viimeisessä eli 64. ruudussa $n = 64$ eli $a_{64} = 2^{64-1} \approx 9{,}2 \cdot 10^{18}$.

VASTAUS a) 8, 16 ja 32 b) $a_n = 2^{n-1}$ c) $9{,}2 \cdot 10^{18}$

ESIMERKKI 3 Onko luku 20 jonon jäsen, kun yleinen jäsen on
a) $a_n = 2n - 95$ b) $a_n = n^2 + n - 10$?

RATKAISU a) Jos luku 20 on jonon jäsen, on olemassa luku n siten, että

$$\begin{aligned} a_n &= 20 \\ 2n - 95 &= 20 \\ 2n &= 115 \quad \big| : 2 \\ n &= 57{,}5 \end{aligned}$$

Koska 57,5 ei ole positiivinen kokonaisluku, luku 20 ei ole jonon jäsen.

b) Ratkaistaan vastaavalla tavalla n yhtälöstä $a_n = 20$.

$$\begin{aligned} n^2 + n - 10 &= 20 \\ n^2 + n - 30 &= 0 \\ n &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1} \\ n &= \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} \\ n &= \frac{-1 \pm 11}{2} \\ n &= -6 \quad \text{tai} \quad n = 5 \end{aligned}$$

ratkaisukaava
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Koska paikan numero n ei voi olla negatiivinen, ratkaisuista kelpaa vain $n = 5$. Luku 20 on siis jonon 5. jäsen.

VASTAUS a) Ei ole. b) On, jonon 5. jäsen.

ESIMERKKI 4

Myymälässä on koottu säilyketölkkejä kerroksiin pyramidimaiseksi keoksi. Tölkkien määrät eri kerroksissa muodostavat lukujonon, jonka yleinen jäsen on $a_n = 37 - 3n$.

a) Kuinka monta tölkkiä on ensimmäisessä kerroksessa?
b) Onko jossakin kerroksessa 19 tölkkiä?
c) Kuinka monta kerrosta keossa on? Montako tölkkiä ylimmässä kerroksessa on?

RATKAISU

a) Lasketaan ensimmäisen kerroksen tölkkien määrä yleisen jäsenen $a_n = 37 - 3n$ avulla.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 37 - 3 \cdot 1 = 34$.

b) Jos jossakin kerroksessa on 19 tölkkiä, yhtälöllä $a_n = 19$ on ratkaisuna positiivinen kokonaisluku. Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} a_n &= 19 \\ 37 - 3n &= 19 \\ -3n &= 19 - 37 \\ -3n &= -18 \qquad \vert : (-3) \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Koska $a_6 = 19$, kuudennessa kerroksessa on 19 tölkkiä.

c) Tölkkien määrät pienenevät jokaisessa kerroksessa. Tölkkien määrät ovat kuitenkin positiivisia kokonaislukuja. Ratkaisemalla epäyhtälö $a_n > 0$ saadaan selville viimeinen jonon jäsen, joka on positiivinen luku.

$$\begin{aligned} 37 - 3n &> 0 \\ -3n &> -37 \qquad \vert : (-3) \\ n &< 12{,}333... \end{aligned}$$

Kun jaetaan negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkin suunta vaihtuu.

Kerrosten lukumäärän voi päätellä suoraan myös epäyhtälön avulla.

Lasketaan jonon 12. ja 13. jäsen:

$$a_{12} = 37 - 3 \cdot 12 = 1 \qquad a_{13} = 37 - 3 \cdot 13 = -2$$

Kasassa voi olla siis vain 12 kerrosta. Tässä kerroksessa on vain yksi tölkki.

VASTAUS a) 34 b) 6. kerroksessa c) 12 kerrosta, 1 tölkki

Tehtäviä

E1 94. Mikä on jonon 25. jäsen, kun jonon yleinen jäsen on

a) $a_n = -4n + 32$ b) $a_n = \dfrac{n^2 - 8n}{4}$?

95. Määritä lukujonon $a_n = 3n^2 - 7n$

a) ensimmäinen jäsen a_1 b) a_3 c) a_{100}.

96. Määritä jonon kolme ensimmäistä jäsentä, kun jonon yleinen jäsen on

a) $a_n = -6n + 5$ b) $a_n = n^2 - n$ c) $a_n = 3^n$.

97. Määritä jonon neljä ensimmäistä jäsentä, kun jonon yleinen jäsen on

a) $a_n = 100 \cdot 0{,}5^{n-1}$ b) $a_n = -4 \cdot (-1)^{n+1}$.

98. Kirjoita näkyviin tilannetta kuvaavan lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä.

a) Emmi tuo lomamatkoilta hiekkarannoilta keräämiään simpukankuoria. Hän päätti tuoda aina seuraavalta matkalta kaksi simpukankuorta enemmän kuin edelliseltä. Ensimmäiseltä matkaltaan Emmi toi neljä simpukankuorta.

b) Konsta päätti vähentää virvoitusjuomien juontia viikoittain aina 0,5 litraa. Ensimmäisellä viikolla Konsta joi virvoitusjuomia 5,0 litraa.

c) Yritys aikoo kasvattaa tulostaan 20 % vuosittain. Ensimmäisen vuoden tulos oli 20 000 €.

E2 99. Radioaktiivisen aineen massa puoliintuu joka tunti. Ainetta on alussa 100 g.

a) Laske aineen massa yhden, kahden ja kolmen tunnin kuluttua.

b) Aineen massat tunneittain muodostavat lukujonon. Päättele jonon yleinen jäsen, kun hajoamisen alkamisesta on kulunut n tuntia.

c) Laske yleisen jäsenen avulla aineen massa 15 tunnin kuluttua. Ilmoita vastaus milligrammoina.

100. Joel otti pankista 1400 euron lainan. Hän lyhensi lainaa 200 € kuukaudessa.
   a) Muodosta lukujono, joka kuvaa jäljellä olevan lainan suuruutta aina lyhennyksen maksamisen jälkeen.
   b) Muodosta lukujonon yleinen jäsen.

E3 101. Onko luku 926 jonon jäsen, kun yleinen jäsen on
   a) $a_n = 6n - 4$ b) $a_n = 4n^2 + 26$

102. Onko luku 120 jonon jäsen?
   a) $a_n = 180 - 12n$ b) $a_n = -12(n - 15)$ c) $a_n = 12(15 + n)$

103. Kuinka mones jäsen luku 20 on jonossa, jonka yleinen jäsen on
   a) $a_n = 6n - 22$ b) $a_n = n^2 - 19n$ c) $a_n = n^2 - n + 8$?

104. Määritä vakio c siten, että $a_9 = -120$, kun $a_n = cn + 6$.

E4 105. Ympyrän muotoisen stadionin katsomo on porrastettu siten, että ylemmäs siirryttäessä penkkien määrä rivillä kasvaa. Penkkien määrän rivillä n kertoo lauseke $20n + 110$.
   a) Kuinka monta penkkiä on 10. rivillä?
   b) Missä rivissä on 510 penkkiä?
   c) Katsomon ylimmällä rivillä on 630 penkkiä. Kuinka mones rivi tämä on?

106. Lotta kävi metsässä keräämässä mustikoita. Hän päätti kerätä aina seuraavalla kerralla 0,4 litraa enemmän marjoja kuin edellisellä kerralla. Ensimmäisellä kerralla Lotta keräsi 3,0 litraa mustikoita.
   a) Muodosta lukujono, joka kuvaa Lotan keräämiä mustikkamääriä.
   b) Muodosta lukujonon yleinen jäsen.
   c) Kuinka monennella kerralla Lotta keräsi mustikoita 11,0 litraa?

Sekalaisia tehtäviä

107. Määritä jonon 12. jäsen, kun yleinen jäsen on
a) $a_n = 42 - 17n$ b) $a_n = -n^3 + n^2 + n$.

108. Onko luku 8 jonon jäsen? Jos on, niin kuinka mones jäsen se on?
a) $a_n = \frac{3n+1}{2}$ b) $a_n = n^2 - 7n$ c) $a_n = 2 + 3n^2$

109. Muodosta kokeilemalla jonon yleinen jäsen a_n, kun jonon neljä ensimmäistä jäsentä ovat
a) 5, 10, 15, 20 b) 100, 97, 94, 91
c) $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ d) $-3, 3, -3, 3$

110. Kuntosalin asiakasmäärä kasvoi vuoden aikana keskimäärin 2 % kuukaudessa. Vuoden alussa kuntosalilla kävi 150 asiakasta. Ylittääkö kuukausittainen asiakasmäärä vuoden lopussa 200 asiakkaan rajan?

111. Yksinkertaisen atomimallin mukaan atomin elektronikuorelle mahtuu enintään $2n^2$ elektronia, kun n on kuoren numero sisimmästä kuoresta alkaen. Elektronien enimmäismäärät eri kuorilla muodostavat lukujonon.
a) Kuinka monta elektronia mahtuu sisimmälle kuorelle?
b) Mille kuorelle mahtuu enintään 98 elektronia?

2.2 Aritmeettinen lukujono

POHDINTA 1

Lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat 2, 5 ja 8 eli
$a_1 = 2$, $a_2 = 5$ ja $a_3 = 8$

a) Tarkastele peräkkäisten jäsenten välistä erotusta.

$a_2 - a_1 =$ $\quad$ $a_3 - a_2 =$

Mitä huomaat?

Ilmoita lukujonon toinen jäsen ensimmäisen jäsenen avulla.

$a_2 =$

Ilmoita lukujonon kolmas jäsen ensimmäisen avulla.

$a_3 =$

b) Päättele edellisen kohdan perusteella lukujonon kolme seuraavaa jäsentä.

$a_4 =$
$a_5 =$
$a_6 =$

Ilmoita nämä jäsenet ensimmäisen jäsenen avulla.

$a_4 =$
$a_5 =$
$a_6 =$

c) Päättele edellisten perusteella seuraavat lukujonon jäsenet:

$a_{25} =$
$a_{100} =$
$a_{500} =$

d) Päättele jonon n. jäsen eli yleinen jäsen.

$a_n =$

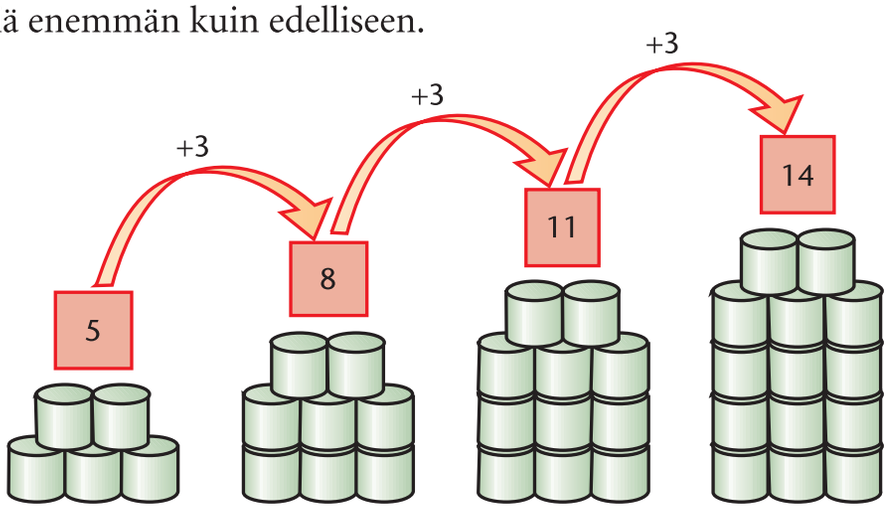
Lukujonoja löytyy monissa arkipäivän asioissa. Tarkastellaan tilannetta, jossa internetoperaattori tarjoaa asiakkaille seuraavaa sopimusta: asiakas maksaa aloitusmaksuna modeemin, jonka hinta on 30 €. Kuukausimaksu on 10 €. Kokonaiskustannukset riippuvat siitä, montako kuukautta asiakas käyttää palvelua.

Aika (kuukautta)	Kustannukset (€)
1	$30 + 10 = 40$
2	$30 + 2 \cdot 10 = 50$
3	$30 + 3 \cdot 10 = 60$
4	$30 + 4 \cdot 10 = 70$
n	$30 + n \cdot 10 = 10n + 30$

Kokonaiskustannukset muodostavat jonon 40, 50, 60, 70, ...

Tämän jonon yleinen jäsen $a_n = 10n + 30$ kertoo siis, kuinka paljon internetin käyttö maksaa, kun palvelua käytetään n kuukautta. Kokonaiskustannukset kasvavat joka kuukausi samalla summalla, 10 eurolla. Tällaista lukujonoa, jonka kahden peräkkäisen jäsenen erotus on vakio, sanotaan **aritmeettiseksi**.

Aritmeettinen jono muodostuu myös esimerkiksi tilanteessa, jossa kootaan juomatölkkejä kasoiksi. Ensimmäiseen kasaan laitetaan 5 tölkkiä, toiseen kasaan 8 tölkkiä ja aina seuraavaan 3 tölkkiä enemmän kuin edelliseen.



Jos jonosta 5, 8, 11, 14, ... valitaan mitkä tahansa kaksi peräkkäistä lukua, niiden erotus on aina sama luku, kolme. Tätä erotusta sanotaan aritmeettisen jonon **erotusvakioksi** eli **differenssiksi**. Sitä merkitään yleensä kirjaimella d.

Lukujono on aritmeettinen, jos minkä tahansa kahden peräkkäisen jäsenen erotus on vakio. Erotus voi olla positiivinen tai negatiivinen luku.

- Jos jonon jäsenet kasvavat, differenssi on positiivinen. Esimerkiksi jonolle 1, 8, 15, 22, ...

$$d = 8 - 1 = 15 - 8 = 7$$

- Jos jonon jäsenet pienenevät, differenssi on negatiivinen. Esimerkiksi jonolle 50, 40, 30, 20, ...

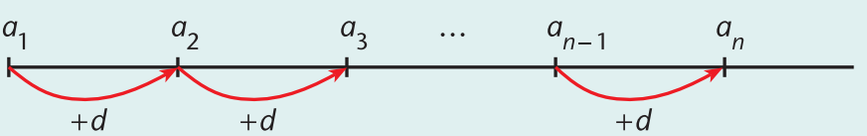
$$d = 40 - 50 = 20 - 30 = -10$$

Aritmeettisen jonon differenssi d

Erotusvakio eli differenssi on kahden peräkkäisen jäsenen erotus

$$d = a_n - a_{n-1}$$

a_n ja a_{n-1} ovat jonon kaksi peräkkäistä jäsentä.



ESIMERKKI 1

Laske aritmeettisen jonon differenssi, kun
a) jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $a_1 = 118$ ja $a_2 = 97$
b) jonosta tunnetaan jäsenet $a_5 = 50$ ja $a_9 = 98$.

RATKAISU

a) Kahden peräkkäisen jäsenen erotus $d = a_2 - a_1 = 97 - 118 = -21$.

b) Jäsenet a_5 ja a_9 eivät ole peräkkäisiä. Jäsen a_9 voidaan kuitenkin esittää differenssin d ja jäsenen a_5 avulla.

$$a_9 = a_5 + d + d + d + d = a_5 + 4 \cdot d$$

$a_6 = a_5 + d$
$a_7 = a_5 + d + d$
$a_8 = a_5 + d + d + d$
$a_9 = a_5 + d + d + d + d$

Ratkaistaan d yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} 50 + 4 \cdot d &= 98 \\ 4 \cdot d &= 48 \quad | : 4 \\ d &= 12 \end{aligned}$$

VASTAUS

a) -21 b) 12

Tarkastellaan vielä jonoa 1, 8, 15, 22, …

Jonon differenssi $d = 7$.

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 8 = 1 + 7$$
$$a_3 = 15 = 1 + 7 + 7 = 1 + 2 \cdot 7$$
$$a_4 = 22 = 1 + 7 + 7 + 7 = 1 + 3 \cdot 7$$
$$a_5 = 29 = 1 + 7 + 7 + 7 + 7 = 1 + 4 \cdot 7$$
$$a_6 = 36 = 1 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 1 + 5 \cdot 7$$

$6 - 1 = 5$

Kun kirjoitetaan riittävän monta jäsentä näkyviin, huomataan, että mikä tahansa jonon jäsen voidaan lausua, vaikka juuri edellistä jäsentä ei tiedettäisikään:

$$a_{10} = 1 + 9 \cdot 7 \qquad a_{50} = 1 + 49 \cdot 7$$

$10 - 1 = 9$ $\qquad$ $50 - 1 = 49$

Näin saadaan lausuttua jonon yleinen jäsen a_n.

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 7$$

ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$ $\qquad$ differenssi $d = 7$

Minkä tahansa aritmeettisen jonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jäsenet voidaan laskea jonon ensimmäisen jäsenen a_1 ja differenssin d avulla.

$$a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_1 + d + d = a_1 + 2 \cdot d$$
$$a_4 = a_1 + d + d + d = a_1 + 3 \cdot d$$

Tämä jonon yleinen jäsen on siis $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.

Aritmeettisen jonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ yleinen jäsen

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

- a_1 on jonon ensimmäinen jäsen
- d on jonon differenssi
- n on järjestysluku

ESIMERKKI 2 Määritä aritmeettisen jonon 99, 92, 85, …
a) yleinen jäsen b) 100. jäsen.

RATKAISU

a) Yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan:
- jonon ensimmäinen jäsen a_1
- jonon differenssi eli erotusvakio d.

Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 99$.

Koska tehtävänannossa on sanottu, että lukujono on aritmeettinen, voidaan differenssi eli erotusvakio laskea minkä tahansa kahden peräkkäisen jäsenen avulla.

Peräkkäisten jäsenten erotus:

- $d = a_2 - a_1 = 92 - 99 = -7$
- $d = a_3 - a_2 = 85 - 92 = -7$

Yleinen jäsen a_n saadaan kaavan $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ avulla.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 99 + (n-1) \cdot (-7) \\ &= 99 - 7n + 7 \\ &= 106 - 7n \end{aligned}$$

$a_1 = 99$
$d = -7$

b) Mikä tahansa jonon jäsen voidaan laskea yleisen jäsenen avulla, jos tiedetään, millä paikalla luku on jonossa. Tällöin yleisen jäsenen lausekkeeseen kirjaimen n paikalle sijoitetaan jäsenen järjestysnumero.

Lukujonon 100. jäsen on

$$a_{100} = 106 - 7 \cdot 100 = -594$$

yleinen jäsen
$a_n = 106 - 7n$
ja
$n = 100$

VASTAUS a) $a_n = 106 - 7n$ b) -594

ESIMERKKI 3 Aritmeettisen jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat 9, 15 ja 21.
a) Kuinka mones jonon jäsen on luku 195?
b) Kuinka moni jonon jäsenistä on pienempi kuin 300?

RATKAISU a) Määritetään ensin jonon yleinen jäsen a_n.

Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 9$.
Jonon peräkkäisten jäsenten erotus $d = a_2 - a_1 = 15 - 9 = 6$.

Lukujonon yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 9 + (n-1) \cdot 6 \\ &= 9 + 6n - 6 \\ &= 6n + 3 \end{aligned}$$

Määritetään yhtälön avulla n siten, että $a_n = 195$.

$$\begin{aligned} a_n &= 195 \\ 6n + 3 &= 195 \\ 6n &= 192 \qquad |:6 \\ n &= 32 \end{aligned}$$

Luku 195 on siis jonon 32. jäsen.

Luku on jonon jäsen, kun yhtälön ratkaisuksi saadaan positiivinen kokonaisluku.

b) Tutkitaan yleisen jäsenen avulla, mikä on jonon jäsenistä viimeinen, joka on pienempi kuin 300. Ratkaistaan epäyhtälö $a_n < 300$.

$$\begin{aligned} 6n + 3 &< 300 \\ 6n &< 297 \qquad |:6 \\ n &< 49{,}5 \end{aligned}$$

Suurin kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n < 49{,}5$, on 49. Tämä voidaan tarkistaa määrittämällä jonon jäsenet a_{49} ja a_{50}.

- $a_{49} = 6 \cdot 49 + 3 = 297$
- $a_{50} = 6 \cdot 50 + 3 = 303$

Jonon jäsen a_{49} on viimeinen, joka on pienempi kuin 300. Jonon 49 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 300.

VASTAUS a) 32. jäsen b) 49

ESIMERKKI 4 Aritmeettisen lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus on 8 ja jonon 35. jäsen on 269. Määritä jonon

a) ensimmäinen jäsen b) yleinen jäsen.

RATKAISU

a) Koska lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus on 8, differenssi on $d = 8$.

Lukujonon 35. jäsen voidaan kirjoittaa lausekkeena ensimmäisen jäsenen a_1 ja differenssin avulla:

$$a_{35} = a_1 + (35 - 1) \cdot d$$

Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on muotoa $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.

Lukujonon 35. jäsen on 269 eli $a_{35} = 269$ ja differenssi $d = 8$, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} a_1 + (35-1) \cdot 8 &= 269 \\ a_1 + 34 \cdot 8 &= 269 \\ a_1 + 272 &= 269 \\ a_1 &= 269 - 272 \\ a_1 &= -3 \end{aligned}$$

b) Lukujonon yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 ja differenssi d.

- $a_1 = -3$
- $d = 8$

Lukujonon yleinen jäsen on muotoa

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= -3 + (n-1) \cdot 8 \\ &= -3 + 8n - 8 \\ &= 8n - 11 \end{aligned}$$

VASTAUS

a) Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -3$.

b) Lukujonon yleinen jäsen $a_n = 8n - 11$.

ESIMERKKI 5

Oopperan permannon ensimmäisen rivin pituus on 12 m. Rivien pituudet muodostavat aritmeettisen jonon. Kymmenes rivi on 39 m pitkä. Kuinka pitkä on viimeinen, 28. rivi?

RATKAISU

Koska ensimmäisen rivin pituus on 12 m, jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 12$. Peräkkäisten jäsenten erotusta ei tiedetä, joten merkitään sitä kirjaimella d.

Jonon yleinen jäsen voidaan kirjoittaa muotoon

$$a_n = 12 + (n-1) \cdot d$$

Tällöin jonon 10. jäsen on $a_{10} = 12 + (10-1) \cdot d$. Kymmenennen rivin pituus on 39 m, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 12 + (10-1) \cdot d &= 39 \\ 12 + 9d &= 39 \\ 9d &= 27 \qquad \big| : 9 \\ d &= 3 \end{aligned}$$

Jonon yleinen jäsen on siis $a_n = 12 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 9$.

Yleisen jäsenen avulla voidaan laskea myös jonon 28. jäsen:

$$a_{28} = 3 \cdot 28 + 9 = 93$$

Viimeisen penkkirivin pituus on 93 m.

VASTAUS

93 m

Tehtäviä

E1 112. Laske aritmeettisen jonon differenssi, kun
a) $a_1 = -8$ ja $a_2 = 6$ b) $a_6 = 42$ ja $a_{11} = 22$.

113. Voiko jono olla aritmeettinen, kun sen kolme ensimmäistä jäsentä ovat
a) 3, 7, 11 b) –2, –8, –14 c) 28, 22, 18 d) –15, 3, 21?

114. Määritä aritmeettisen jonon differenssi, kun $a_1 = \frac{3}{7}$ ja $a_2 = \frac{22}{35}$.

115. Mikä on aritmeettisen jonon yleinen jäsen, kun
a) jonon ensimmäinen jäsen on 3 ja differenssi 2
b) $a_1 = 4$ ja $d = 5$?

E2 116. Määritä aritmeettisen jonon –32, –27, –22, ...
a) yleinen jäsen b) 34. jäsen.

117. Määritä aritmeettisen jonon yleinen jäsen, kun
a) $a_1 = 8$ ja $a_2 = -1$ b) $a_1 = -3$ ja $a_2 = -5$.

118. Määritä aritmeettisen jonon 120. jäsen, kun
a) jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat 15, 19, 23
b) $a_1 = -17$ ja $a_2 = -19$.

E3 119. Aritmeettisen jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat 211, 204 ja 197.
a) Kuinka mones jonon jäsen on luku –2029?
b) Kuinka moni jonon jäsenistä on positiivinen luku?

120. Kuinka mones jäsen luku 885 on jonossa
a) 5, 10, 15, 20, … b) 17, 24, 31, 38, …?

121. Kuinka mones jäsen luku –520 on aritmeettisessa jonossa, jonka
a) ensimmäinen jäsen on 4 ja differenssi –4
b) $a_1 = -1000$ ja $d = 3$?

122. Aritmeettisen lukujonon ensimmäinen jäsen on 95 ja differenssi –7. Onko luku
a) 0 b) –346 tämän lukujonon jäsen?

E4 123. Erään aritmeettisen jonon differenssi on 4. Jonon 15. jäsen on 44. Määritä jonon
a) ensimmäinen jäsen
b) yleinen jäsen.

124. Aritmeettisen jonon $a_{50} = -278$ ja $a_{55} = -308$. Määritä jonon
a) ensimmäinen jäsen ja differenssi
b) yleinen jäsen.

E5 125. Katkaistun kartion muotoisen kivirakennelman alimmassa kerroksessa on 1480 kiveä. Jokainen ylempi kerros sisältää 50 kiveä vähemmän kuin edellinen kerros. Kuinka monta kiveä on päällimmäisessä kerroksessa? Kuinka mones kerros se on?

126. Rebekka on ottanut 4200 euron lainan, jota hän lyhentää 200 euron kuukausierissä.
a) Muodosta sen lukujonon yleinen jäsen, joka kertoo jäljellä olevan lainan määrän aina lyhennyksen jälkeen.
b) Milloin Rebekka on maksanut koko lainan takaisin?

127. Tiina pinoaa halkoja. Alimpaan halkokerrokseen hän laittaa 50 halkoa vierekkäin. Kuudennessa halkokerroksessa halkoja on 40 kappaletta. Kuinka monta halkoa on 15. halkokerroksessa, kun halkojen määrät kerroksissa muodostavat aritmeettisen jonon?

128. Kroisos sijoittaa osakerahastoon määräsumman joka kuukausi. Tammikuussa Kroisos sijoittaa 100 €. Hän päättää nostaa summaa 30 € joka kuukausi. Sijoitetuista summista muodostuu aritmeettinen jono.
a) Määritä jonon yleinen jäsen.
b) Kuinka paljon Kroisos sijoittaa tasan 4 vuoden kuluttua säästämisen aloittamisesta?

129. Potilaan ensimmäisen päivän lääkeannos oli 400 mg. Lääkeannosta vähennetään siten, että jokaisen päivän annos on 25 mg edellistä pienempi. Lääkeannoksista muodostuu aritmeettinen jono.
a) Kuinka paljon lääkettä on otettava 10. päivänä?
b) Kuinka monta päivää lääkekuuri kestää?

Sekalaisia tehtäviä

130. Määritä aritmeettisen jonon yleinen jäsen, kun jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat
a) $-10, -4$ ja 2 b) $130, 119$ ja 108 c) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ ja $\frac{7}{6}$.

131. Onko luku 102 jonon jäsen, kun kolme ensimmäistä jäsentä ovat
a) $-26, -10, 6$ b) $999, 995, 991$?

132. Aritmeettisen jonon differenssi on -7. Lisäksi tiedetään, että jonon 9. jäsen on -51. Määritä a_{1500}.

133. Niina päättää aloittaa lenkkeilyn. Hän juoksee ensimmäisellä viikolla 3,2 km:n lenkin. Niina päättää nostaa lenkin pituutta joka viikko yhtä monta metriä. Kolmannella viikolla Niinan lenkin pituus on jo 4,0 km. Millä viikolla lenkin pituus ylittää 15 km?

134. Sähkölaitokselta lähtee voimalinja, joka kulkee yleisen tien vieressä. Ensimmäinen sähköpylväs on 650 m:n päässä sähkölaitoksesta. Tämän jälkeen pylväiden välit ovat 350 m. Pylväiden etäisyydet sähkölaitoksesta muodostavat aritmeettisen jonon.
a) Kuinka kaukana sijaitsee 50. pylväs?
b) Kuinka mones on pylväs, jonka etäisyys sähkölaitoksesta on 45,1 km?

2.3 Aritmeettinen summa

POHDINTA 1 Tutkitaan aritmeettista jonoa, jonka yleinen jäsen on $a_n = 4n - 2$.

a) Määritä jonon viisi ensimmäistä jäsentä.

$a_1 =$
$a_2 =$
$a_3 =$
$a_4 =$
$a_5 =$

b) Laske jonon viiden ensimmäisen jäsenen summa.

$S_5 =$

c) Kohdan a summa voidaan laskea myös käyttäen hyväksi keskimmäistä viidestä luvusta. Miten?

d) Määritä jonon 29. luku.

$a_{29} =$

e) Tutki summaa $a_1 + a_2 + ... + a_{29}$. Mikä on tässä summalausekkeessa keskimmäinen luku? Päättele sen avulla summa.

$S_{29} =$

f) Miten laskisit samalla idealla jonon neljän ensimmäisen jäsenen summan?

$S_4 =$

g) Päättele edellisten kohtien avulla jonon sadan ensimmäisen jäsenen summa.

$S_{100} =$

Jos aritmeettisen jonon $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ jäsenet lasketaan yhteen, syntyy **aritmeettinen summa S_n**:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

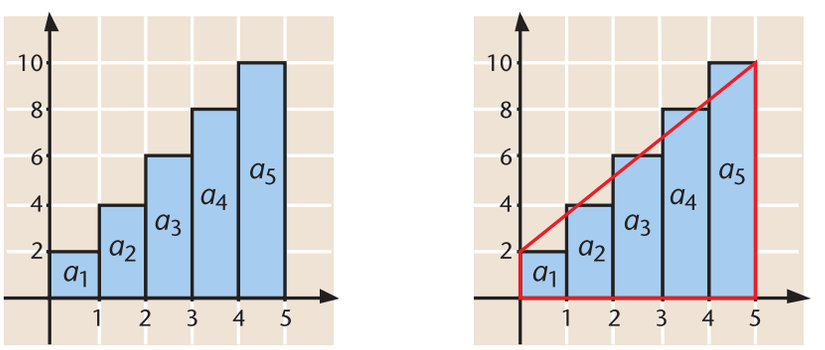
Tutkitaan viittä suorakulmiota, joiden kaikkien kanta on pituudeltaan 1. Suorakulmioiden korkeudet ovat 2, 4, 6, 8 ja 10. Tällöin suorakulmioiden alat muodostavat aritmeettisen jonon, jonka

- ensimmäinen jäsen on 2
- differenssi on 2
- yleinen jäsen on $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2n$.

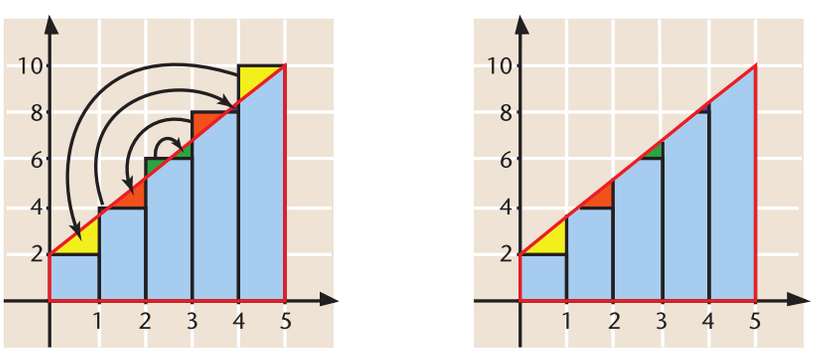
Kun lasketaan yhteen suorakulmioiden alat, syntyy aritmeettinen summa:

$$S_n = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

Yhteispinta-ala voidaan laskea myös käyttäen hyväksi puolisuunnikasta, joka voidaan muodostaa suorakulmioiden osista. Piirretään suorakulmioiden ympäri puolisuunnikas kuvan tavalla.

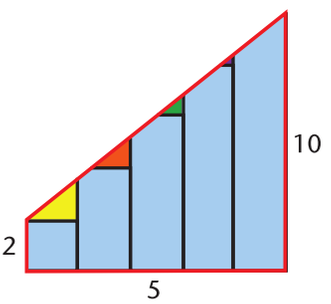


Puolisuunnikkaan ulkopuolelle jäävät kolmiot ovat yhteneviä puolisuunnikkaan sisään jäävien kolmioiden kanssa. Siirretään ulkopuolelle jäävät kolmiot puolisuunnikkaan sisälle.



Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 2 ja 10. Yhdensuuntaisten sivujen välinen etäisyys eli korkeus on 5. Puolisuunnikkaan ala on yhtä suuri kuin suorakulmioiden yhteispinta-ala. Puolisuunnikkaan alan laskemiseen tarvitaan

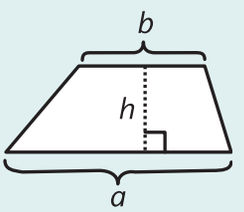
- puolisuunnikkaan korkeus
- yhdensuuntaisten sivujen keskiarvo



$$A = 5 \cdot \frac{2 + 10}{2} = 30$$

Puolisuunnikkaan ala

$$A = h \cdot \frac{a+b}{2}$$



Mitä tahansa aritmeettista jonoa voidaan havainnollistaa vastaavalla suorakulmioiden joukolla. Jonon jäsenten summa on tässä mallissa aina suorakulmioiden kokonaispinta-ala, joka voidaan laskea suorakulmioiden ympäri piirretyn puolisuunnikkaan avulla.

Puolisuunnikkaan pinta-alaa voidaan soveltaa mihin tahansa aritmeettiseen summaan $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, kun tunnetaan yhteenlaskettavien määrä n sekä summan ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava:

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Summan viimeinen jäsen voidaan määrittää kaavalla

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Aritmeettinen summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

- n on yhteenlaskettavien lukumäärä
- a_1 on ensimmäinen yhteenlaskettava
- a_n on viimeinen yhteenlaskettava

ESIMERKKI 1 Aritmeettisen jonon yleinen jäsen on $a_n = 5 - 2n$. Laske jonon 20 ensimmäisen jäsenen summa.

RATKAISU Summan laskemiseksi on tiedettävä sen ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava. Määritetään ne jonon yleisen jäsenen avulla.

$$a_1 = 5 - 2 \cdot 1 = 3$$
$$a_{20} = 5 - 2 \cdot 20 = -35$$

Koska yhteenlaskettavia on 20,

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{3 - 35}{2} = 20 \cdot (-16) = -320$$

$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

VASTAUS -320

ESIMERKKI 2 Laske aritmeettisen jonon -100, -95, -90, ... viidenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

RATKAISU Summan laskemiseksi tarvitaan jonon viimeinen jäsen a_{50}.

- Jonon differenssi on $d = -95 - (-100) = 5$.
- Ensimmäinen jäsen $a_1 = -100$.

Määritetään jonon yleinen jäsen ja sen avulla a_{50}.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= -100 + (n-1) \cdot 5 \\ &= -100 + 5n - 5 \\ &= 5n - 105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{50} &= 5 \cdot 50 - 105 \\ &= 145 \end{aligned}$$

Summassa $a_1 = -100$, $a_{50} = 145$ ja $n = 50$.

$$S_{50} = 50 \cdot \frac{-100 + 145}{2} = 1125$$

VASTAUS 1125

ESIMERKKI 3 Laske summa $4 + 10 + 16 + \ldots + 196$.

RATKAISU Kyseessä on aritmeettinen summa, koska yhteenlaskettavat muodostavat aritmeettisen jonon. Lukujonon differenssi

$$d = 10 - 4 = 16 - 10 = 6$$

Summan laskemiseksi tarvitaan

- yhteenlaskettavien määrä, n
- ensimmäinen jäsen, $a_1 = 4$
- viimeinen jäsen, $a_n = 196$.

Lasketaan ensin yhteenlaskettavien määrä aritmeettisen jonon yleisen jäsenen avulla.

Yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + (n-1) \cdot 6 \\ &= 4 + 6n - 6 \\ &= 6n - 2 \end{aligned}$$

Koska viimeinen yhteenlaskettava on 196, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 6n - 2 &= 196 \\ 6n &= 198 \quad | : 6 \\ n &= 33 \end{aligned}$$

Lasketaan nyt summa aritmeettisen summan kaavalla.

$$\begin{aligned} S_{33} &= 33 \cdot \frac{4 + 196}{2} \\ &= 3300 \end{aligned}$$

$n = 33$
$a_1 = 4$
$a_{33} = 196$

VASTAUS 3300

ESIMERKKI 4

Leila on päättänyt osallistua Naisten kymppi -urheilutapahtumaan. Hänen kuntonsa on rapistunut, joten harjoittelu täytyy aloittaa hyvissä ajoin. Ensimmäisellä viikolla Leila juoksee 2,0 km:n lenkin. Seuraavalla viikolla hän juoksee 400 m pidemmälle. Näin Leila lisää juoksulenkin pituutta joka viikko 400 m.

a) Kuinka monennella harjoitteluviikolla hän juoksee täydet 10,0 km?

b) Kuinka paljon juoksukilometrejä on tähän mennessä harjoittelujakson aikana kertynyt?

RATKAISU

a) Leila juoksee

- ensimmäisellä viikolla 2,0 km
- toisella viikolla 2,0 km + 0,4 km = 2,4 km
- kolmannella viikolla 2,4 km + 0,4 km = 2,8 km.

Juoksulenkit (km) muodostavat aritmeettisen jonon 2; 2,4; 2,8; …

Jonon differenssi on $d = 0{,}4$ (km), jolloin yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= 2{,}0 + (n-1) \cdot 0{,}4 \\ &= 2{,}0 + 0{,}4n - 0{,}4 \\ &= 0{,}4n + 1{,}6 \end{aligned}$$

Yleinen jäsen kertoo viikolla n juostun matkan pituuden.

Ratkaistaan yleisen jäsenen avulla, milloin juostu matka on 10,0 km.

$$\begin{aligned} 0{,}4n + 1{,}6 &= 10{,}0 \\ 0{,}4n &= 8{,}4 \quad | : 0{,}4 \\ n &= 21 \end{aligned}$$

Leila juoksee 10,0 km 21. harjoitteluviikolla.

b) Harjoittelujakson aikana juostaan matka, joka muodostuu jonon 21 ensimmäisen jäsenen summasta.

$$S_{21} = 2{,}0 + 2{,}4 + 2{,}8 + \ldots + 10{,}0$$

Lasketaan summa summakaavan avulla.

$$S_{21} = 21 \cdot \frac{2{,}0 + 10{,}0}{2} = 126$$

$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

Leila juoksee harjoittelujakson (21 viikon) aikana yhteensä 126 km.

VASTAUS a) 21. viikolla b) 126 km

ESIMERKKI 5

Pyramidin muotoa käytetään myös nykyaikaisessa rakentamisessa. Kalifornialaisen pyramidin muotoisen pilvenpiirtäjän ulkoseinät on katettu suurilla maisemaikkunoilla. Kerrosten ikkunoiden määrät muodostavat aritmeettisen jonon 156, 151, 146, ... Rakennusvaiheessa urakoitsija tilasi 2480 ikkunaa, jotka riittivät kaikkiin kerroksiin. Urakoitsijalla oli rakennuslupa korkeintaan 30-kerroksiseen pilvenpiirtäjään.

a) Mikä on tämän perusteella pilvenpiirtäjän suurin mahdollinen kerrosmäärä?

b) Montako ikkunaa tällöin jää käyttämättä?

RATKAISU

Jonon 156, 151, 146, ... yleinen jäsen on

$a_n = 156 + (n-1) \cdot (-5) = 161 - 5n.$

Jonon
- ensimmäinen jäsen $a_1 = 156$
- differenssi $d = 151 - 156 = -5$

Merkitään rakennuksen kerrosten määrää kirjaimella n, jolloin ylimmässä kerroksessa on $161 - 5n$ ikkunaa. Ikkunoita on käytössä yhteensä 2480, joten saadaan yhtälö:

$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

$$n \cdot \left(\frac{156+161-5n}{2}\right) = 2480 \qquad \mid \cdot 2$$

$$n(317-5n) = 4960$$

$$-5n^2 + 317n - 4960 = 0$$

$$n = \frac{-317 \pm \sqrt{317^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-4960)}}{2 \cdot (-5)}$$

$$n = \frac{-317 \pm \sqrt{1289}}{-10}$$

$$n = 28{,}109... \quad \text{tai} \quad n = 35{,}290...$$

Kerroksia voi olla korkeintaan 30, joten kerrosten lukumäärä on 28.

Viimeisessä kerroksessa olevien ikkunoiden lukumäärän tulee olla positiivinen luku. Tarkistetaan tämä yleisen jäsenen avulla. Kun $n = 28$, $a_{28} = 161 - 5 \cdot 28 = 21$

b) Lasketaan ikkunoiden kokonaismäärä, kun kerroksia on 28.

$$S_{28} = 28 \cdot \left(\frac{156+21}{2}\right) = 2478$$

Ikkunoita oli tilattu 2480, joten $2480 - 2478 = 2$ ikkunaa jää käyttämättä.

VASTAUS

a) Rakennuksessa on 28 kerrosta. b) 2 ikkunaa jää käyttämättä.

Tehtäviä

135. Laske seuraavat aritmeettiset summat käyttäen hyödyksi summakaavaa $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$.
   a) $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + 27 + 32 + 37 + 42 + 47 + 52$
   b) $-90 + (-85) + (-80) + (-75) + (-70) + (-65) + (-60)$
   c) $1 + 2 + 3 + \ldots + 9999$
   d) $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$

E1 136. Laske yhteen aritmeettisen jonon 25 ensimmäistä jäsentä, kun jonon yleinen jäsen on
   a) $a_n = 5n - 2$ b) $a_n = 17 - 6n$.

E2 137. Laske yhteen aritmeettisen lukujonon 50 ensimmäistä jäsentä, kun jonon neljä ensimmäistä jäsentä ovat
   a) 12, 15, 18, 21 b) 240, 227, 214, 201.

E3 138. Laske summa
   a) $-32 + (-28) + (-24) + \ldots + 92 + 96$
   b) $3 + 19 + 35 + 51\ldots + 1491 + 1507$.

139. Laske summa $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + 10\frac{1}{2}$.

140. Kuinka monen lukujonon 2, 26, 50, … ensimmäisen jäsenen summa on vähintään 25 000?

141. Määritä suurin sellainen luku m, että $1 + 2 + 3 + \ldots + m \leq 462\,241$. [K1998, 8b]

142. Kun aritmeettisen jonon 99 ensimmäistä jäsentä laskettiin yhteen, saatiin summaksi 17 919. Summan viimeinen jäsen oli 524.
   a) Mikä oli summan ensimmäinen jäsen?
   b) Määritä jonon yleinen jäsen.

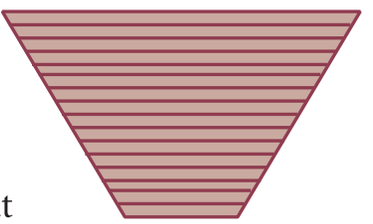
143. Erään aritmeettisen jonon differenssi on 11. Jonon 40 ensimmäisen jäsenen summa on 8700. Määritä jonon yleinen jäsen.

E4 144. Liike tilasi erän uutuustuotetta. Ensimmäisellä viikolla tuotetta myytiin 125 kappaletta. Tuotteen myynti kasvoi joka viikko 25 kappaleella.
   a) Kuinka monta kappaletta tuotetta myytiin 10. viikolla?
   b) Koko erä myytiin loppuun 18. viikolla. Kuinka monta kappaletta liike tilasi tavaraa?

145. Kuinka suuri on kaikkien
a) kolmella jaollisten
b) neljällä jaollisten
kolminumeroisten luonnollisten lukujen summa?

146. Toipilaana oleva henkilö kävelee ensimmäisenä päivänä vain 50 m, mutta pidentää sitten kävelymatkaansa joka päivä 100 metrillä. Kuinka pitkän matkan hän tulee kävelleeksi 30 ensimmäisen päivän aikana? [S1994, 9c]

147. Pojat aikoivat valmistaa kesämökilleen kuvan mukaisen, tasakylkisen puolisuunnikkaan muotoisen laiturin. Pisin laituriin tarvittava laudanpätkä on 3,2 m ja lyhin 80 cm. Laituriin tarvittavat laudat lyhenevät pisimmästä pätkästä alkaen aina 5,0 cm.



a) Kuinka monta laudanpätkää laituriin tarvitaan?
b) Kuinka monta metriä lautaa laituriin kuluu yhteensä?

148. Kymmenen kilometrin valtatieosuudelle pystytetään valaisinpylväät 50 metrin välein. Urakoitsija hakee autolla kolme pylvästä kerralla varastosta, kuljettaa pylväät oikeille paikoille ja lähtee hakemaan seuraavaa erää. Varasto sijaitsee saman tien varrella kaksi kilometriä ennen valaistavan osuuden alkua. Työ alkaa varastolta ja päättyy sinne. Kuinka pitkän matkan urakoitsija joutuu siirtotyössä vähintään ajamaan? [K1999, 7b]

E5 149. Kauppias asettelee ananastölkit pinoon siten, että pinon huipulla on yksi tölkki, seuraavassa kerroksessa neljä tölkkiä, seuraavassa taas kolme enemmän ja niin edelleen. Tölkkejä on yhteensä 230.
a) Kuinka monta kerrosta tölkkipinossa on?
b) Kuinka monta tölkkiä alimmassa kerroksessa on?
c) Kuinka monta tölkkiä jää yli?

150. Kahdeksan kissanpentua söi viiden päivän aikana yhteensä 160 kalaa. Jokainen kissa saa aina seuraavana päivänä yhden kalan edellistä päivää enemmän. Kuinka monta kalaa kissat söivät ensimmäisenä päivänä?

151. Auditorion ensimmäisellä penkkirivillä on 12 istuinta. Istuimien määrä kasvaa aina neljällä, kun siirrytään seuraavalle penkkiriville. Auditoriossa on yhteensä 352 istuinta. Kuinka monta penkkiriviä auditoriossa on?

Sekalaisia tehtäviä

152. Laske aritmeettiset summat summakaavan avulla.
a) $90+82+74+66+58+50+42+34+26$
b) $-15+(-12)+(-9)+(-6)+(-3)+0+3+6+9$

153. Laske summa.
a) $100+95+90+\ldots+(-25)+(-30)$
b) $\frac{1}{4}+\frac{13}{36}+\frac{17}{36}+\ldots+3\frac{17}{36}$

154. Kuinka monta aritmeettisen jonon $-5, -7, -9, \ldots$ jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa alittaa -600?

155. Herra Virtanen saa matkallaan Afrikassa hankalan trooppisen sairauden, johon määrätään lääkitys. Ensimmäisenä päivänä lääkeannos on 125 mg. Annosta pienennetään joka päivä 5 milligrammalla.
a) Kuinka kauan lääkekuuri kestää?
b) Kuinka paljon lääkettä Virtanen joutuu yhteensä syömään?

156. Tukit on asetettu pinoon siten, että pinon ylimmässä kerroksessa on vain yksi tukki. Seuraavissa kerroksissa on aina yksi tukki enemmän. Tukkeja on yhteensä 171. Kuinka monta kerrosta pinossa on?

2.4 Geometrinen lukujono

POHDINTA 1

a) Lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat 3, 6 ja 12 eli $a_1 = 3$, $a_2 = 6$ ja $a_3 = 12$.

Tarkastele peräkkäisten jäsenten välistä suhdetta:

$\frac{a_2}{a_1} =$ $\frac{a_3}{a_2} =$

Mitä huomaat?

Miten voit ilmoittaa lukujonon toisen jäsenen ensimmäisen jäsenen avulla?

$a_2 =$

Miten voit ilmoittaa lukujonon kolmannen jäsenen ensimmäisen jäsenen avulla?

$a_3 =$

b) Päättele edellisen kohdan perusteella lukujonon kolme seuraavaa jäsentä.

$a_4 =$
$a_5 =$
$a_6 =$

Ilmoita nämä jäsenet ensimmäisen jäsenen avulla.

$a_4 =$
$a_5 =$
$a_6 =$

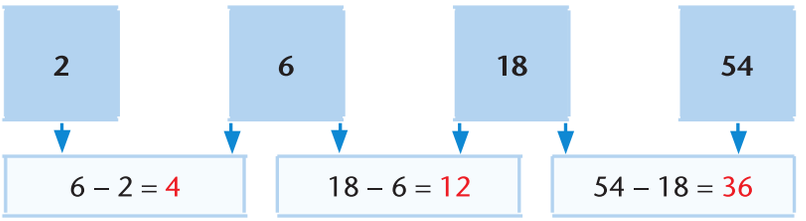
c) Päättele edellisten perusteella seuraavat lukujonon jäsenet:

$a_{25} =$
$a_{100} =$
$a_{500} =$

d) Päättele jonon n:s jäsen eli yleinen jäsen.

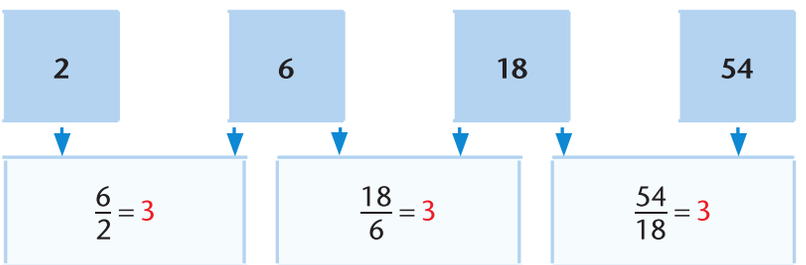
$a_n =$

Tarkastellaan lukujonoa 2, 6, 18, 54, … Lasketaan ensin lukujonon muutaman ensimmäisen jäsenen avulla peräkkäisten jäsenten välisiä erotuksia.



Koska peräkkäisten jäsenten välinen erotus eli differenssi ei ole vakio, kyseessä ei voi olla aritmeettinen lukujono.

Tarkastellaan seuraavaksi peräkkäisten jäsenten välistä suhdetta.



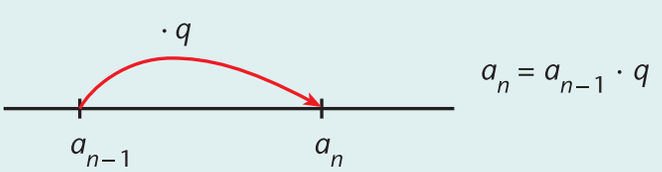
Valitaanpa mitkä tahansa kaksi peräkkäistä jäsentä, niiden suhde on aina 3.

Tällaista lukujonoa, jossa peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, kutsutaan **geometriseksi lukujonoksi**. Peräkkäisten jäsenten välistä suhdetta kutsutaan **suhdeluvuksi *q***.

Geometrinen lukujono

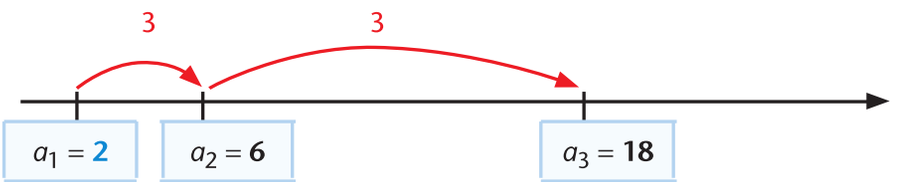
- Geometrisessa lukujonossa minkä tahansa kahden peräkkäisen jäsenen suhde on aina vakio.
- Suhdetta kutsutaan suhdeluvuksi q.

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$



Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen voitiin ilmoittaa ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla. Tarkastellaan nyt vastaavasti geometrisen lukujonon yleisen jäsenen muodostumista.

Tutkitaan, miten lukujonon 1, 6, 18, 54, … muut jäsenet voidaan ilmoittaa ensimmäisen jäsenen ($a_1 = 2$) ja suhdeluvun ($q = 3$) avulla.



Lukujonon jäsen a_n	Jäsen ilmoitettuna ensimmäisen jäsenen a_1 ja suhdeluvun q avulla
$a_1 = 2$	
$a_2 = 6$	$2 \cdot 3$
$a_3 = 18$	$2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$
$a_4 = 54$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^3$
…	
a_{10}	$2 \cdot 3^9$
a_{25}	$2 \cdot 3^{24}$

Suhdeluvun eksponentti on yhden yksikön verran pienempi kuin jäsenen järjestysnumero. Jonon n:s jäsen on siis $2 \cdot 3^{n-1}$.

Minkä tahansa geometrisen lukujonon yleinen jäsen voidaan vastaavasti määrittää ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

Geometrisen lukujonon yleinen jäsen

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

- a_1 on jonon ensimmäinen jäsen
- q on peräkkäisten jäsenten suhde
- n on järjestysluku ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

ESIMERKKI 1 Määritä geometrisen lukujonon 3, 12, 48, …
a) yleinen jäsen b) 9. jäsen.

RATKAISU

a) Geometrisen lukujonon yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja suhdeluku q.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$.
- Peräkkäisten jäsenten suhde $q = \frac{12}{3} = 4$.

$q = \frac{48}{12} = 4$

Yleinen jäsen on

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$$

b) Mikä tahansa jonon jäsen voidaan laskea yleisen jäsenen avulla.

Jonon 9. jäsen on

$$a_9 = 3 \cdot 4^{9-1} = 3 \cdot 4^8 = 196\,608$$

Geometrisen lukujonon jäsenet voivat kasvaa nopeasti hyvinkin suuriksi luvuiksi.

VASTAUS a) $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ b) $a_9 = 196\,608$

ESIMERKKI 2 Geometrisen lukujonon suhdeluku on -2 ja viides jäsen -48. Mikä on tämän lukujonon ensimmäinen jäsen?

RATKAISU Ilmoitetaan lukujonon viides jäsen ensin suhdeluvun $q = -2$ ja ensimmäisen jäsenen a_1 avulla.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = a_1 \cdot q^4 = a_1 \cdot (-2)^4 = a_1 \cdot 16 = 16a_1$$

Koska lukujonon viides jäsen $a_5 = -48$, saadaan yhtälö

$$16a_1 = -48 \quad |:16$$
$$a_1 = -3$$

VASTAUS Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -3$.

ESIMERKKI 3 Kuinka mones jäsen luku 208,75 on geometrisessa jonossa 6680, 3340, 1670, …?

RATKAISU Määritetään ensin jonon yleinen jäsen.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 6680$.
- Peräkkäisten jäsenten suhde $q = \frac{3340}{6680} = 0{,}5$.

$q = \frac{1670}{3340} = 0{,}5$

Jonon yleinen jäsen on

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 6680 \cdot 0{,}5^{n-1}$$

Jos luku 208,75 on jäsenenä lukujonossa, täytyy löytyä sellainen luonnollinen luku n, että $a_n = 208{,}75$.

Ratkaistaan yhtälöstä $a_n = 208{,}75$ jäsenen järjestysluku n.

$$\begin{aligned} a_n &= 208{,}75 \\ 6680 \cdot 0{,}5^{n-1} &= 208{,}75 \quad \big| : 6680 \\ 0{,}5^{n-1} &= 0{,}03125 \end{aligned}$$

Ratkaistava järjestysluku n on suhdeluvun eksponentissa. Tällainen eksponenttiyhtälö saadaan ratkaistua logaritmin avulla.

$$\begin{aligned} 0{,}5^{n-1} &= 0{,}03125 \\ \lg 0{,}5^{n-1} &= \lg 0{,}03125 \\ (n-1)\lg 0{,}5 &= \lg 0{,}03125 \quad \big| : \lg 0{,}5 \\ n-1 &= \frac{\lg 0{,}03125}{\lg 0{,}5} \\ n &= \frac{\lg 0{,}03125}{\lg 0{,}5} + 1 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Eksponenttiyhtälön ratkaisu

1. Otetaan yhtälön molemmilta puolilta logaritmi.
2. Käytetään eksponentin siirtosääntöä $\lg a^r = r \cdot \lg a$.

Luku 208,75 on siis lukujonon 6. jäsen.

VASTAUS Luku 208,75 on lukujonon kuudes jäsen.

ESIMERKKI 4

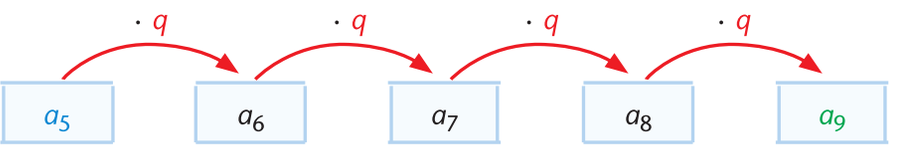
Geometrisen jonon viides jäsen $a_5 = 112$ ja yhdeksäs jäsen $a_9 = 1792$.

a) Määritä jonon suhdeluku.

b) Mitkä ovat tämän lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä?

RATKAISU

a) Koska lukujono on geometrinen, voidaan jonon jäsen laskea kertomalla edellinen jäsen suhdeluvulla.



Tällöin siis $a_5 \cdot q^4 = a_9$.

Koska $a_5 = 112$ ja $a_9 = 1792$, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 112q^4 &= 1792 \quad | :112 \\ q^4 &= 16 \\ q &= \pm\sqrt[4]{16} \\ q &= \pm 2 \end{aligned}$$

Koska eksponentti on parillinen, yhtälöllä on kaksi ratkaisua.

Geometrisen jonon suhdeluku voi olla joko 2 tai –2.

b) Lasketaan ensin lukujonon ensimmäinen jäsen. Lukujonon viides jäsen ensimmäisen jäsenen avulla lausuttuna on

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

$q = 2$

$$\begin{aligned} 112 &= a_1 \cdot 2^4 \\ 112 &= 16a_1 \quad | :16 \\ a_1 &= 7 \\ a_2 &= 7 \cdot 2 = 14 \end{aligned}$$

$q = -2$

$$\begin{aligned} 112 &= a_1 \cdot (-2)^4 \\ 112 &= 16a_1 \quad | :16 \\ a_1 &= 7 \\ a_2 &= 7 \cdot (-2) = -14 \end{aligned}$$

VASTAUS

a) Suhdeluku on joko 2 tai –2.

b) Jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat joko 7 ja 14 tai 7 ja –14.

ESIMERKKI 5

Joanna ja Venla rakentavat tulitikkuaskeista torneja. Ensimmäinen torni koostuu yhdestä tulitikkuaskista. Joannan seuraavan tornin korkeus on aina kolminkertainen edelliseen torniin verrattuna. Venla lisää jokaisella kerralla seuraavaa tornia rakentaessaan yhtä monta tulitikkuaskia. Kuinka monta tulitikkuaskia Venlan on joka kerta lisättävä, jotta hänen viides torninsa olisi yhtä korkea kuin Joannan viides torni?

RATKAISU

Koska Joannan torniin kuuluvien tulitikkuaskien määrä aina kolminkertaistuu, askien määrät muodostavat geometrisen lukujonon.

Lukujonon ensimmäinen termi on sama kuin ensimmäisen tornin korkeus eli $a_1 = 1$. Suhdeluku on $q = 3$.

Joannan viidennen tornin korkeus on

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 \cdot q^{5-1} \\ &= a_1 \cdot q^4 \\ &= 1 \cdot 3^4 \\ &= 81 \end{aligned}$$

Koska Venla lisää joka kerta saman määrän tulitikkuaskeja, hänen torneihinsa tarvittavat askien määrät muodostavat aritmeettisen jonon.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1$. Merkitään jokaisella kerralla lisättävien tulitikkuaskien määrää kirjaimella d.

Koska viidennessä tornissa on oltava 81 tulitikkuaskia, lukujonon viidennen jäsenen on oltava 81. Muodostetaan tilanteesta yhtälö.

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + (5-1) \cdot d \\ a_5 &= a_1 + 4d \\ 81 &= 1 + 4d \end{aligned}$$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Ratkaistaan yhtälöstä lisättävien tulitikkuaskien määrä d.

$$\begin{aligned} 1 + 4d &= 81 \\ 4d &= 80 \quad | : 4 \\ d &= 20 \end{aligned}$$

VASTAUS

Venlan on lisättävä 20 tulitikkuaskia jokaisella kerralla.

Tehtäviä

157. Laske geometrisen lukujonon suhdeluku, kun jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat
a) 4, 20, 100 b) –9, 27, –81
c) 550, –440, 352 d) $3, \frac{3}{4}, \frac{3}{16}$.

158. Määritä geometrisen lukujonon 8. jäsen, kun yleinen jäsen on
a) $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ b) $a_n = -1 \cdot 0{,}2^{n-1}$.
Mikä on lukujonon ensimmäinen jäsen? Mikä on lukujonon suhdeluku?

E1 159. Määritä geometrisen lukujonon 5, 35, 245, …
a) yleinen jäsen b) 7. jäsen.

160. Määritä lukujonon 9. jäsen, kun sen kolme ensimmäistä jäsentä ovat
a) 12, –36, 108 b) $-2, -1, -\frac{1}{2}$.

E2 161. Määritä geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen, kun jonon suhdeluku on 4 ja kuudes jäsen –7168.

162. a) Geometrisen lukujonon kuudes jäsen on 486. Mikä on lukujonon ensimmäinen jäsen, kun jonon suhdeluku on 3?
b) Geometrisen lukujonon kahdeksas jäsen on –312 500. Mikä on lukujonon suhdeluku, kun lukujonon ensimmäinen jäsen on –4?

163. Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on 4 ja viides jäsen 324. Määritä lukujonon kymmenes jäsen.

E3 164. Kuinka mones jäsen luku 64 on jonossa
a) 2, 4, 8, … b) 32 768, 16 384, 8192, …?

165. Onko luku 17 496 sellaisen lukujonon jäsen, jonka kolme ensimmäistä jäsentä ovat
a) 3, 36, 432 b) 8, 24, 72?

E4 166. Geometrisen lukujonon neljäs jäsen $a_4 = 54$ ja kymmenes jäsen $a_{10} = 39\,366$.
a) Määritä jonon suhdeluku.
b) Mitkä ovat tämän lukujonon kaksi enimmäistä jäsentä?

167. Geometriselle lukujonolle $a_3 = -16$ ja $a_8 = -512$. Määritä lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä.

168. Paperiarkkien A0, A1, A2, A3 jne. pinta-alat muodostavat geometrisen lukujonon. A0-arkin pinta-ala on 1 m^2. Laske A4-arkin pinta-ala, kun lukujonon suhdeluku on $\frac{1}{2}$.

169. Karla pudottaa pallon maahan kerrostalon parvekkeelta. Pallo pomppaa maasta niin, että pompun korkeus on aina $\frac{4}{5}$ edellisen pompun korkeudesta. Kuinka korkealle pallo nousee maasta kymmenennen pomppauksen jälkeen, kun ensimmäisen pomppauksen korkeus on 8,0 m?

170. Emilia ja Eero keräävät postimerkkejä. He ovat aloittaneet keräilyn kaksitoista viikkoa sitten. Emilia kertoi, että hän on pystynyt kaksinkertaistamaan postimerkkikokoelmansa joka viikko keräilyharrastuksen alusta alkaen. Eero puolestaan on pystynyt lisäämään postimerkkiensä määrää aina 25 kappaleella viikoittain.
   a) Kumpikin kirjaa postimerkkiensä määrät muistiin viikoittain. Kumman merkkien määrä muodostaa aritmeettisen lukujonon? Entä geometrisen lukujonon?
   b) Kuinka paljon kummallakin on tällä hetkellä postimerkkejä, jos keräilyn alkaessa heillä oli molemmilla yksi postimerkki?

E5 171. Noora ja Juuso kasasivat kolikoita pinoihin. Kummallakin oli ensimmäisessä pinossa viisi kolikkoa. Noora laittoi seuraavaan pinoon aina kaksinkertaisen määrän kolikkoja edelliseen pinoon verrattuna. Juuso puolestaan lisäsi jokaisella kerralla seuraavaan kolikkopinoon aina saman määrän kolikoita. Nooran ja Juuson kuudensissa kolikkopinoissa oli yhtä monta kolikkoa. Kuinka monta kolikkoa Juuso oli omaan pinoonsa aina joka kerta lisännyt?

172. Oskari lähettää sähköpostilla ketjukirjeen kolmelle ystävälleen. Jokainen ystävistä lähettää saman ketjukirjeen aina kahdelle sellaiselle ystävälle, jotka eivät ole vielä ketjukirjettä saaneet.
   a) Kuinka moni saa kirjeen kymmenennellä lähetyskierroksella?
   b) Tutki kokeilemalla, kuinka monennella lähetyskierroksella kirjeen saajia on ensimmäisen kerran yli 200 000?

Sekalaisia tehtäviä

173. Tarkastellaan geometrista lukujonoa 3, 6, 12, …
   a) Mikä on tämän lukujonon yleinen jäsen?
   b) Määritä lukujonon 12. jäsen.
   c) Onko luku 98 304 lukujonon jäsen?

174. Määritä geometrisen lukujonon kymmenes jäsen, kun jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat
   a) 1, −2, 4 b) 3, 15, 75.

175. Mikä on sellaisen geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen, jonka suhdeluku on 0,8 ja kahdeksas jäsen 16 384?

176. Lukujonon kolmas jäsen on 500 ja seitsemäs jäsen 8000. Määritä lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä.

177. Tapio nostaa kuntoaan rullaluistelemalla. Hän päättää luistella aina viikon ajan samanmittaista lenkkiä. Ensimmäisen viikon luistelulenkin pituus on 5,0 km. Seuraavilla viikoilla Tapio kasvattaa lenkin pituutta aina 20 %.
   a) Kuinka pitkän lenkin Tapio luistelee viiden viikon kuluttua kuntoilun aloittamisesta?
   b) Kuinka pitkän lenkin Tapio olisi luistellut ensimmäisellä viikolla, jos kahdeksan viikon kuluttua kuntoilun aloittamisesta hänen lenkkinsä pituus olisi 25 km?
   c) Helmi päättää nostaa oman rullaluistelulenkkinsä pituutta yhtä monta kilometriä joka viikko. Hän aloittaa samalla 5,0 km:n lenkillä kuin Tapio. Kuinka paljon Helmin on kasvatettava joka viikko lenkin pituutta, jotta hänenkin luistelulenkkinsä pituus olisi kahdeksan viikon kuluttua 25 km?

2.5 Geometrinen summa

Summakaava

Tarkastellaan geometrista lukujonoa 2, 6, 18, 54, … Lukujonon

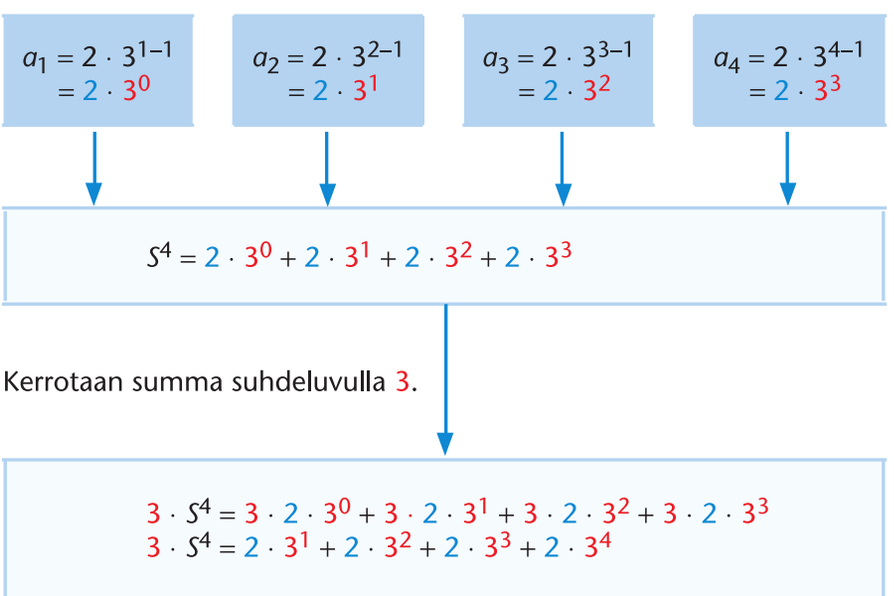
- ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$
- suhdeluku $q = \frac{6}{2} = 3$
- yleinen jäsen $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Kun lasketaan yhteen neljä ensimmäistä geometrisen lukujonon lukua, saadaan **geometrinen summa**

$$S_4 = 2 + 6 + 18 + 54 = 80$$

Jos summassa olisi paljon yhteenlaskettavia, summan laskeminen näin olisi työlästä. Geometriselle summalle on olemassa oma laskukaavansa aivan kuten aritmeettiselle summalle.

Tarkastellaan summakaavan muodostumista. Kirjoitetaan ensin edellisen summan yhteenlaskettavat ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla. Muodostetaan tämän jälkeen toinen summalauseke kertomalla alkuperäinen summa lukujonon suhdeluvulla $q = 3$.



Muodostetaan kahdesta edellä muodostetusta summasta yhtälöpari ja ratkaistaan siitä lauseke summalle S_4.

$$\begin{cases} S_4 = 2\cdot 3^0 + 2\cdot 3^1 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 \\ 3\cdot S_4 = 2\cdot 3^1 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^4 \quad \big|\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad S_4 = 2\cdot 3^0 + 2\cdot 3^1 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 \\ -3\cdot S_4 = \quad -2\cdot 3^1 - 2\cdot 3^2 - 2\cdot 3^3 - 2\cdot 3^4 \end{cases}$$

Erotetaan yhteinen tekijä.

$$S_4 - 3S_4 = 2\cdot 3^0 \qquad -2\cdot 3^4$$

$$(1-3)S_4 = 2(3^0 - 3^4) \qquad \big|:(1-3)$$

Jätetään vähennyslaskut ja potenssiin korottamiset suorittamatta, jotta saadaan summakaavan muoto näkyviin.

$$S_4 = \frac{2\cdot(3^0 - 3^4)}{1-3}$$

$$S_4 = 2\cdot\frac{1-3^4}{1-3} = 80$$

Edellä laskettu summa on lukujonon neljän ensimmäisen jäsenen summa.

- ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$
- suhdeluku $q = 3$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 4$

Kun edellisessä summan laskussa korvataan luvut kirjaimilla, saadaan geometrisen summan kaava yleisessä muodossa.

$$S_4 = 2\cdot\frac{1-3^4}{1-3} \quad \longrightarrow \quad S_n = a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

Kun geometrisen jonon a_1, a_2, a_3,… jäseniä lasketaan yhteen n kappaletta, syntyy (äärellinen) geometrinen summa S_n

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Tämä summa voidaan helposti laskea summakaavan avulla, kun tunnetaan yhteenlaskettavien lukumäärä n, jonon suhdeluku q sekä jonon ensimmäinen jäsen a_1.

Summakaava on voimassa vain, jos $q \neq 1$. Jos $q = 1$, summa on aritmeettinen $a_1 + a_1 + \ldots + a_1 = na_1$.

Geometrinen summa

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1$$

- n on yhteenlaskettavien lukumäärä
- a_1 on lukujonon ensimmäinen jäsen
- q on suhdeluku

ESIMERKKI 1

Laske geometrisen lukujonon $-6, 12, -24, \ldots$ kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

RATKAISU

Geometrisen summan laskemiseksi tarvitaan

- yhteenlaskettavien määrä $n = 10$
- lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -6$
- suhdeluku $q = \frac{12}{-6} = -2$.

Kysytty summa on

$$\begin{aligned} S_{10} &= -6 \cdot \frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)} \\ &= -6 \cdot \frac{1-1024}{1+2} \\ &= -6 \cdot \frac{-1203}{3} \\ &= 2046 \end{aligned}$$

VASTAUS

Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on 2046.

ESIMERKKI 2 Laske geometrinen summa $2 + 8 + 32 + \ldots + 8192$.

RATKAISU Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2$ ja suhdeluku $q = \frac{8}{2} = 4$. Määritetään geometrisen lukujonon yleisen jäsenen avulla, kuinka monta yhteenlaskettavaa summassa on.

Viimeinen yhteenlaskettava eli lukujonon n. jäsen on $a_n = 8192$. Koska geometrisen lukujonon yleinen jäsen on muotoa $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, saadaan yhtälö

$$2 \cdot 4^{n-1} = 8192$$

Ratkaistaan yhtälöstä n.

$$\begin{aligned}
2 \cdot 4^{n-1} &= 8192 \quad | : 2 \\
4^{n-1} &= 4096 \\
\lg 4^{n-1} &= \lg 4096 \\
(n-1)\lg 4 &= \lg 4096 \quad | : \lg 4 \\
n - 1 &= \frac{\lg 4096}{\lg 4} \\
n &= \frac{\lg 4096}{\lg 4} + 1 \\
n &= 7
\end{aligned}$$

Eksponenttiyhtälön ratkaisu

1. Otetaan yhtälön molemmilta puolilta logaritmi.
2. Käytetään eksponentin siirtosääntöä $\lg a^r = r \cdot \lg a$.

Summassa on siis 7 yhteenlaskettavaa.

Käytetään summan laskemiseksi geometrisen summan kaavaa

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Seitsemän ensimmäisen jäsenen summa on

$$\begin{aligned}
S_7 &= 2 \cdot \frac{1 - 4^7}{1 - 4} \\
&= 2 \cdot \frac{1 - 16\,384}{1 - 4} \\
&= 2 \cdot \frac{-16\,383}{-3} \\
&= 2 \cdot 5461 \\
&= 10\,922
\end{aligned}$$

$a_1 = 2$
$q = 4$
$n = 7$

VASTAUS 10 922

ESIMERKKI 3 Kuinka monta ensimmäistä geometrisen jonon $1{,}4;\ 1{,}4^2;\ 1{,}4^3;\ \ldots$ jäsentä on laskettava yhteen, jotta summan arvo ylittää 1 000 000?

RATKAISU Selvitetään, millä yhteenlaskettavien lukumärällä n summa on tasan 1 000 000.

Muodostetaan summakaavan avulla yhtälö.

$S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$

- ensimmäinen jäsen $a_1 = 1{,}4$
- suhdeluku $q = \dfrac{1{,}4^2}{1{,}4} = 1{,}4$

$$1{,}4 \cdot \frac{1-1{,}4^n}{\underbrace{1-1{,}4}_{-0{,}4}} = 1\,000\,000 \qquad \big| \cdot(-0{,}4)$$

$$1{,}4(1-1{,}4)^n = -400\,000 \qquad \big| : 1{,}4$$

$$1-1{,}4^n = -285\,714{,}28....$$

$$-1{,}4^n = -285\,715{,}28....$$

Tuntematon eksponentti ratkaistaan logaritmin avulla. Koska logaritmi voidaan ottaa vain positiivisesta luvusta, kerrotaan yhtälön molemmat puolet luvulla -1.

$$-1{,}4^n = -285\,715{,}28... \qquad \big| \cdot(-1)$$

$$1{,}4^n = 285\,715{,}28...$$

$$\lg 1{,}4^n = \lg 285\,715{,}28...$$

$$n \cdot \lg 1{,}4 = \lg 285\,715{,}28... \qquad \big| : \lg 1{,}4$$

$$n = \frac{\lg 285\,715{,}28...}{\lg 4}$$

$$n = 37{,}336...$$

Koska tehtävässä kysyttiin, milloin summa **ylittää** luvun 1 000 000, yhtälön vastaus **pyöristetään ylöspäin** seuraavaan kokonaislukuun eli $n = 38$.

Pyöristyksen voi myös tarkistaa laskemalla summan arvot:

- Kun $n = 37$, summa on $1{,}4 \cdot \dfrac{1-1{,}4^{37}}{1-1{,}4} = 892\,902{,}7...$
- Kun $n = 38$, summa on $1{,}4 \cdot \dfrac{1-1{,}4^{38}}{1-1{,}4} = 1\,250\,063{,}8...$

VASTAUS Vähintään 38 jäsentä.

Sovelluksia

Geometrisella lukujonolla voidaan kuvata tilanteita, joissa suhteellinen muutos pysyy samana. Tällaisia tilanteita ovat esimerkiksi lukumäärien prosentuaaliset muutokset.

Monet pankkitalletuksiin liittyvät ongelmat käsittelevät korkoa ja sen vaikutusta talletuksen suuruuteen. Koska korko on aina jokin prosentuaalinen osuus talletetusta rahasummasta, tilanteita voidaan yleensä kuvata nimenomaan geometrisella lukujonolla.

Pankkitalletusten koroista maksetaan lähdeveroa. Tässä kirjassa korkolaskujen kohdalla lähdevero jätetään kuitenkin huomioimatta. Lähdeveroa käsitellään tarkemmin talousmatematiikan kurssilla.

Esimerkki 4

Rosa avaa vuoden 2014 alussa tilin, jonka korkoprosentti on 1,5 %. Hän tallettaa aina vuoden alussa tilille 500,00 €. Korko lisätään talletettuun pääomaan aina jokaisen vuoden lopussa.

a) Kuinka paljon Rosan tilillä on rahaa vuoden 2020 lopussa koron lisäyksen jälkeen?

b) Kuinka paljon talletukset ovat vuosien aikana kasvaneet korkoa yhteensä?

Ratkaisu

a) Tilin korko on 1,5 %, joten tilillä oleva rahamäärä tulee vuodessa aina 1,015-kertaiseksi.

100 % + 1,5 %
= 1015 %
= 1,015

Tarkastellaan tilille kertyvää rahamäärää talletus kerrallaan.

Talletusvuosi	Kuinka monta vuotta talletus kasvaa korkoa?	Talletuksen suuruus vuoden 2020 lopussa (€)
2014	7	$1{,}015^7 \cdot 500$
2015	6	$1{,}015^6 \cdot 500$
2016	5	$1{,}015^5 \cdot 500$
2017	4	$1{,}015^4 \cdot 500$
2018	3	$1{,}015^3 \cdot 500$
2019	2	$1{,}015^2 \cdot 500$
2020	1	$1{,}015^1 \cdot 500$

Tilillä kokonaisuudessaan oleva rahasumma on korkoa kasvaneiden talletusten summa.

Summan lasku riippuu siitä, käsitelläänkö talletusten muodostamaa lukujonoa pienimmästä suurimpaan vai suurimmasta pienimpään.

Tapa 1
Pienimmästä suurimpaan

Jonon ensimmäinen jäsen
$a_1 = 1{,}015^1 \cdot 500$

Suhdeluku

$$q = \frac{1{,}015^2 \cdot 500}{1{,}015^1 \cdot 500} = 1{,}015$$

Summa

$$S_7 = 1{,}015 \cdot 500 \cdot \frac{1 - 1{,}015^7}{1 - 1{,}015} = 3716{,}419... \approx 3716{,}42$$

Tapa 2
Suurimmasta pienimpään

Jonon ensimmäinen jäsen
$a_1 = 1{,}015^7 \cdot 500$

Suhdeluku

$$q = \frac{1{,}015^6 \cdot 500}{1{,}015^7 \cdot 500} = \frac{1}{1{,}015}$$

Summa

$$S_7 = 1{,}015^7 \cdot 500 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}015}\right)^7}{1 - \left(\frac{1}{1{,}015}\right)} = 3716{,}419... \approx 3716{,}42$$

b) Rosa talletti tilille rahaa yhteensä

$$7 \cdot 500\ € = 3500\ €$$

Talletukset olivat siis kasvaneet korkoa

$$3716{,}42\ € - 3500\ € = 216{,}42\ €$$

VASTAUS

a) Tilillä on rahaa vuoden 2010 lopussa 3716,42 €.
b) Talletukset olivat kasvaneet korkoa yhteensä 216,42 €.

ESIMERKKI 5

Nooa rakensi kesälomallaan laivaa. Hän arvioi rakentamiseen kuluvan aikaa 30 tuntia. Ensimmäisenä päivänä Nooa rakensi laivaa 0,5 tuntia. Seuraavina päivinä hän työskenteli aina kaksi kertaa niin kauan kuin edellisenä päivänä. Kuinka monen päivän kuluttua laiva valmistui?

RATKAISU

Tarkastellaan Nooan päivittäisiä työskentelyaikoja muutamana ensimmäisenä päivänä.

1. päivä	0,5 tuntia
2. päivä	$2 \cdot 0{,}5 = 1$ tuntia
3. päivä	$2 \cdot 1 = 2$ tuntia
4. päivä	$2 \cdot 2 = 4$ tuntia

Päivittäiset työskentelyajat muodostavat geometrisen lukujonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 0{,}5$ ja suhdeluku $q = 2$.

Koska laivan rakentamiseen kuluu yhteensä 30 tuntia, saadaan yhtälö

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$$
\begin{aligned}
0{,}5 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} &= 30 && \mid \cdot(-1)\\
0{,}5 \cdot (1-2^n) &= -30 && \mid : 0{,}5\\
1-2^n &= -60\\
-2^n &= -61 && \mid \cdot(-1)\\
2^n &= 61\\
\lg 2^n &= \lg 61\\
n \cdot \lg 2 &= \lg 61 && \mid : \lg 2\\
n &= \frac{\lg 61}{\lg 2}\\
n &= 5{,}930\ldots
\end{aligned}
$$

Jos Nooa rakentaa laivaa viitenä päivänä ($n = 5$), hän työskentelee yhteensä

$$0{,}5 \cdot \frac{1-2^5}{1-2} = 15{,}5 \text{ tuntia} < 30 \text{ tuntia}$$

Kuutena päivänä ($n = 6$) Nooa työskentelee yhteensä

$$0{,}5 \cdot \frac{1-2^6}{1-2} = 31{,}5 \text{ tuntia} > 30 \text{ tuntia}$$

VASTAUS

Nooa saa laivan valmiiksi kuudentena päivänä.

Tehtäviä

Summakaava

178. Laske summa geometrisen lukujonon summakaavan $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ avulla.

a) $1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + 4096 + 16\,384$
b) $-0{,}3 - 0{,}9 - 2{,}7 - 8{,}1 - 24{,}3 - 72{,}9 - 218{,}7 - 656{,}1$
c) $5860 - 2930 + 1465 - 732{,}5 + 366{,}25 - 183{,}125$

E1 179. Laske geometrisen lukujonon kahdeksan ensimmäisen jäsenen summa, kun lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat
a) 3, 6 ja 12 b) -5, -15 ja -45.

180. Lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat 2 ja 8. Laske lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa, kun lukujono on
a) geometrinen b) aritmeettinen.

181. Laske summan arvo kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
a) $0{,}6 + 0{,}6^2 + 0{,}6^3 + \ldots + 0{,}6^{11}$
b) $3 + 3 \cdot 0{,}8 + 3 \cdot 0{,}8^2 + 3 \cdot 0{,}8^3 + \ldots + 3 \cdot 0{,}8^{12}$

E2 182. Laske geometrinen summa $1 + 6 + 36 + \ldots + 46\,656$.

183. Laske geometrinen summa $3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2187}$.

184. Laske geometrinen summa $-3\,920\,000 + (-980\,000) + (-245\,000) + \ldots + (-3828{,}125)$ kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

185. Laske.
a) $2 + 4 + 8 + \ldots + 4096$ b) $2 + 4 + 6 + \ldots + 24$

E3 186. Kuinka monta ensimmäistä geometrisen jonon 3, 9, 27, 81, … jäsentä on laskettava yhteen, jotta summan arvo ylittäisi 9999?

187. Kuinka monta geometrisen lukujonon 0,4; 2,4; 14,4; … jäsentä on laskettava yhteen, jotta
a) summa ylittää luvun 10 000
b) summa olisi korkeintaan 50 000?

188. Määritä suurin sellainen luonnollinen luku a, että $2 + 10 + 50 + \ldots + a \leq 200\,000$.

Sovelluksia

189. Kroisos tallettaa elokuun ensimmäisenä päivänä tililleen yhden euron. Elokuun toisena päivänä hän tallettaa kaksinkertaisen määrän eli 2 €. Kolmantena päivänä hän jälleen kaksinkertaistaa talletettavan summan. Kuinka paljon rahaa Kroisos on tililleen tallettanut kahden viikon aikana?

190. Kesäkahvilan avajaisviikon myyntitulot olivat 3500 €. Sateisen kesän vuoksi kahvilan myyntitulot pienenivät joka viikko keskimäärin 4,1 %. Kahvila oli kesäaikaan auki yhteensä 9 viikkoa. Laske kahvilan koko kesän myyntitulot.

191. Ismo teki opiskelun ohessa stand up -koomikon töitä. Tammikuussa 2014 hänellä oli kaksi esiintymistä. Esiintymisten määrä kasvoi kuukausittain 10 %.
   a) Kuinka monta esiintymistä Ismolla on koko vuoden 2014 aikana?
   b) Milloin Ismo esiintyy 500. kerran?

E4 192. Verna ja Santeri säästävät maailmanympärysmatkaa varten. He keräävät ensin vuoden ajan rahaa säästöpossuun ja tallettavat sitten vuoden aikana keräämänsä rahasumman aina vuoden lopussa pankkitilille. Pankkitilin korko on 1,8 % ja korko lisätään talletettuun pääomaan aina jokaisen vuoden lopussa.
   a) Verna ja Santeri päättivät säästää viiden vuoden ajan vuosittain 2000,00 € ja nostaa säästöt kuuden vuoden kuluttua, kun viimeinenkin talletussumma on kasvanut vuoden korkoa. Kuinka paljon Vernan ja Santerin pankkitilillä on matkarahaa?
   b) Kuinka paljon talletukset ovat vuosien aikana kasvaneet yhteensä korkoa?

193. Eräässä tutkimuksessa valmistettiin tunnin välein soluviljelmiä, joiden massa alussa oli 2,5 mg. Soluviljelmän massa kasvoi tutkimuksen aikana 35 % tunnissa.
   a) Tutkimusryhmä valmisti yhteensä kuusi soluviljelmää (yhden viljelmän aina tunnissa). Päivän tutkimukset lopetettiin, kun viimeisenkin soluviljelmän valmistamisesta oli kulunut yksi tunti. Kuinka suuri oli soluviljelmien yhteismassa tutkimuspäivän lopussa?
   b) Kuinka paljon soluviljelmien massa on tutkimuspäivän aikana kasvanut yhteensä?

E5 194. Pihla haaveilee uudesta matkapuhelimesta. Puhelimen hinta on 195 €. Hän päättää jättää makeisten syönnin vähemmälle ja säästää rahat uuteen puhelimeen. Ensimmäisen viikon aikana Pihla saa säästöön yhteensä 3 €. Seuraavien viikkojen aikana hän säästää rahaa aina kaksi kertaa niin paljon kuin edellisellä viikolla. Kuinka monen viikon kuluttua Pihla voi ostaa uuden puhelimen?

195. Tippavaaran pikkukylän taidenäyttelyssä oli ensimmäisenä päivänä 150 kävijää. Määrä väheni päivittäin keskimäärin 12 %. Kuinka monen päivän kuluttua näyttelyssä oli käynyt yli 400 henkilöä?

196. Pekka luki tenttiin 1650-sivuista teosta. Hän luki ensimmäisenä päivänä 107 sivua. Pekka päätti lukea seuraavina päivinä 1,3 % enemmän. Kuinka monen päivän jälkeen koko kirja oli luettu?

197. Postimyyntiliike pyrkii saamaan lisää asiakkaita lupaamalla lahjan asiakkaalleen, joka hankkii kaksi uutta asiakasta. Liisa haluaa lahjan ja ilmoittaa kaksi ystäväänsä, jotka puolestaan hankkivat kukin kaksi uutta asiakasta jne. Oletetaan, että jokaiseen uusien asiakkaiden hankkimiskierrokseen kuluu aikaa viikko eikä entisiä asiakkaita saa pyytää uudelleen. Kuinka monta uutta asiakasta tällä tavalla olisi saatu kokoon viidessä viikossa? Muodosta lauseke uusien asiakkaiden määrälle n viikon kuluttua. Kuinka monta viikkoa menisi siihen, että näin hankittuja uusia asiakkaita olisi yli 10 000? [S2009, 11]

198. Kootaan pieneneviä kuutioita päällekkäin. Ensimmäisen kuution särmä on tasan yksi metri, ja muiden kuutioiden särmät ovat pituudeltaan aina puolet alla olevan kuution särmästä.
a) Määritä kolmen alimman ja n:nnen kuution särmän pituus.
b) Kuinka korkea on pino, jossa on 10 ensimmäistä kuutiota? Laske taulukkoon pinon korkeuden arvot, kun kuutioita on 11, 12, 13 ja 14. Jos ajatellaan kuutioiden määrän kasvavan rajatta, mitä lukua pinon korkeus näyttää lähestyvän? [K2001, 9]

199. Jarkon omistaman metsän puuston määrä on 3100 m^3. Metsän keskimääräinen kasvu on 4,2 % vuosittain. Metsästä hakataan 161 m^3 jokaisen vuoden alussa. Oletetaan, että hakkuuvauhti ja kasvu pysyvät vuosittain samana. Kuinka paljon puustoa metsässä on 16 vuoden jälkeen?

Sekalaisia tehtäviä

200. Tarkastellaan geometrista lukujonoa 3, 12, 48, ….
a) Laske lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.
b) Mikä on tällöin viimeinen yhteenlaskettava?

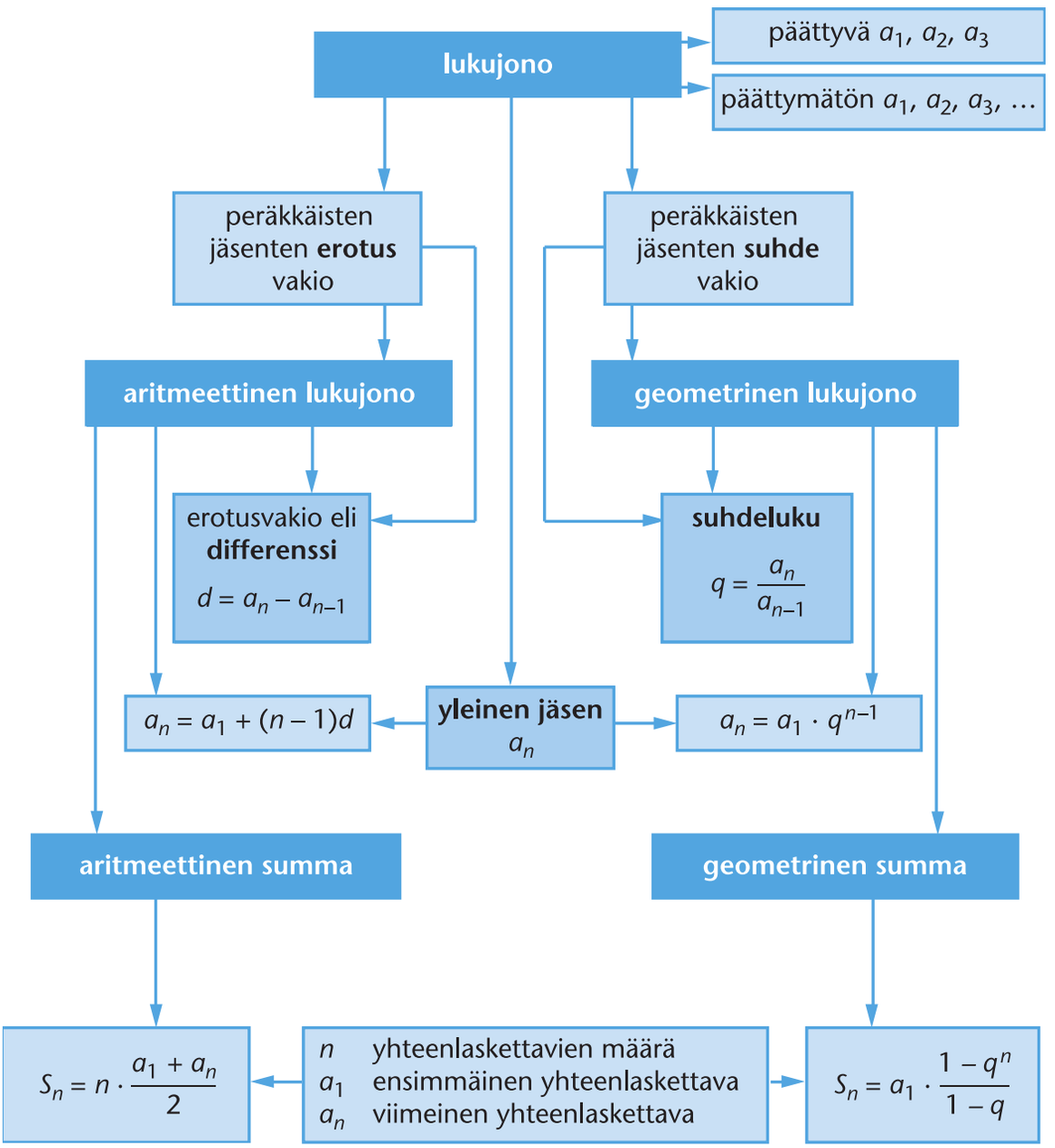
201. Laske geometrisen lukujonon lukujen summa.
a) 5, 25, 125, …, 78 125 b) 2, 6, 18, 54, …, 118 098

202. Kuinka monta lukujonon 1,6; 12,8; 102,4; … lukua on laskettava yhteen, jotta summa olisi
a) vähintään 25 000 b) korkeintaan 538 000?

203. Jalmari seurasi erään kesäkuun viikon sademääriä. Hän totesi niiden kasvaneen keskimäärin 4,7 % jokaisena päivänä. Paljonko viikon aikana satoi, kun ensimmäisenä päivänä satoi 8,0 mm?

204. Asuntosäästäjä talletti säästötilille 4000 € vuodessa. Vuoden lopussa tilillä olevalle rahasummalle maksetaan 2,0 %:n korko.
a) Kuinka paljon on asuntosäästäjän tilillä viiden vuoden kuluttua koron lisäyksen jälkeen?
b) Kuinka paljon talletukset ovat viiden vuoden aikana kasvaneet yhteensä korkoa?
c) Kuinka monen vuoden kuluttua pankkitilillä on rahaa vähintään 30 000 €?

Keskeisiä käsitteitä



3 Kertausosa

Kahden muuttujan lineaarinen yhtälö

- Yhtälöä, joka voidaan sieventää muotoon $ax + by + c = 0$, sanotaan kahden muuttujan lineaariseksi yhtälöksi.
- Kahden muuttujan lineaarisen yhtälön kuvaaja on suora.

1. Piirrä suora.
   a) $y = -x + 1$ b) $-2y - x + 1 = 0$
   c) $4x - 2y + 3 = -5$

2. Ratkaise graafisesti suorien leikkauspiste.
   a) $y = 3x - 1$ ja $y = -2x + 9$
   b) $3x + 3y = 6$ ja $y + 2x - 7 = 0$

3. Leena ostaa irtokarkkeja. Merirosvorahat maksavat 6,00 €/kg ja suklaatryffelit 7,00 €/kg. Karkit saavat maksaa yhteensä 5,00 €.
   a) Muodosta lauseke, joka kuvaa ostettavien makeisten kokonaishintaa.
   b) Ratkaise yhtälön avulla, kuinka paljon merirosvorahoja voidaan ostaa, jos suklaatryffeleitä ostetaan 200 g.

4. Missä pisteissä suora
   a) $y = -2x - 1$ b) $3y + x - 2 = 0$
   leikkaa koordinaattiakselit?

Yhtälöpari

- Yhtälöpari ratkaistaan joko sijoitusmenetelmällä tai yhteenlaskumenetelmällä.
- Sijoitusmenetelmässä toisen tuntemattoman lauseke sijoitetaan toiseen yhtälöön.
- Yhteenlaskumenetelmässä toinen tuntematon eliminoidaan ja saadusta yhtälöstä ratkaistaan jäljelle jäänyt tuntematon. Tässä menetelmässä yhtälöitä lasketaan allekkain yhteen.

5. Mitkä luvut x ja y toteuttavat seuraavat yhtälöt?
   a) $x + 5y = 0$ ja $-x + 4y = 27$
   b) $-x + 2y = 1$ ja $y = x + 1$

6. Määritä suorien leikkauspiste.
   a) $3x - y = 2$ ja $-6x + 2y = -4$
   b) $y = -x + 4$ ja $y + x + 5 = 0$

7. Ratkaise yhtälöpari.
   a) $\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} -0{,}3x + 7y = 5(x + 2y + 2) \\ 3(2{,}1x + y) = x + 2 \end{cases}$

- Sovellustehtävässä kannattaa edetä seuraavasti:
  1) Merkitse kysyttyjä asioita kirjaimilla.
  2) Muodosta tehtävässä annetuista tiedoista kirjaimien avulla yhtälöitä.
  3) Ratkaise yhtälöryhmä sijoitus- tai yhteenlaskumenetelmällä.

8. Kaupassa myytiin torttuja kahden ja kuuden kappaleen pakkauksissa. Torttuja oli leivottu yhteensä 260 ja pakkauksia oli 70. Kuinka monta oli kumpiakin pakkauskokoja?

9. Ida tutki lentokentälle kulkevien bussien ja taksien matkustajamääriä eräänä viikonloppuna. Tulokset on koottu seuraavaan taulukkoon.

	Bussien määrä	Taksien määrä
Lauantai	68	136
Sunnuntai	106	124

Kuinka monta matkustajaa keskimäärin saapui lentokentälle yhdessä bussissa, kun lauantaina turisteja saapui yhteensä 3196 ja sunnuntaina 4806? Mikä oli tämän perusteella yhden taksin keskimääräinen matkustajamäärä?

10. Timolla on käytettävissä 1,5- ja 20,0-prosenttista saippualiuosta. Miten liuoksia on sekoitettava, jotta Timo saa 10,0-prosenttista liuosta 1,5 l?

Kahden muuttujan lineaarinen epäyhtälö

- Epäyhtälön tai epäyhtälöryhmän ratkaisuvaiheet:
  1) Ratkaistaan epäyhtälöt y:n suhteen.
  2) Muodostetaan vastaavat yhtälöt ja piirretään niitä kuvaavat suorat.
  3) Epäyhtälöiden avulla päätellään oikea tasoalue, jonka pisteet (x, y) toteuttavat kaikki epäyhtälöt. Tarkistetaan ratkaisu valitsemalla tasoalueesta piste. Pisteen koordinaattien on toteutettava kaikki epäyhtälöt.
  4) Vastaukseksi riittää usein tasoalueen kuva.

11. Ratkaise epäyhtälö muuttujan y suhteen ja esitä epäyhtälö koordinaatistossa.
    a) $x > 2y - 2$
    b) $4x - y \leq 2y + x + 6$

12. Ratkaise graafisesti epäyhtälöryhmä.
    a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 3 \\ y \geq x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x \leq -2y + 2 \\ 2y \geq 3x - 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

    c) $\begin{cases} y < -5x + 9 \\ -x + 2y < 6 \\ 3y + x - 3 > 0 \end{cases}$

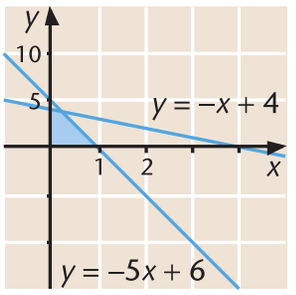
13. Kahvilassa myydään ruisvoileipiä ja vehnäsämpylöitä. Ruisvoileivälle laitetaan kolme kinkkuviipaletta ja yksi juustoviipale. Sämpylä sisältää kaksi kinkku- ja juustoviipaletta. Kinkkuviipaleita on valmiina 62 ja juustoviipaleita 50. Tarkastele epäyhtälöiden avulla, millaisia määriä voileipiä voidaan valmistaa näistä aineksista.

Lausekkeen arvo tasoalueessa

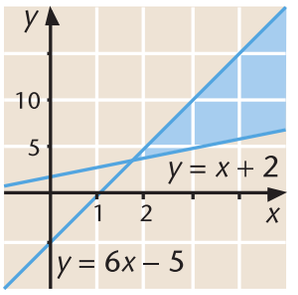
- Optimoinnissa on seuraavat ratkaisuvaiheet:
  1) Muodosta rajoitusehtojen mukainen alue koordinaatistoon.
  2) Laske muodostuneen alueen kärkipisteiden koordinaatit.
  3) Laske optimoitavan lausekkeen arvo tasoalueen kärkipisteissä.

14. Määritä lausekkeen $2x + y$ suurin ja pienin arvo kuvan tasoalueessa.

a)



b)



15. Laske lausekkeen $-3x - 2{,}3y$ suurin ja pienin arvo tasoalueessa, jonka määräävät epäyhtälöt $-5x + y \geq -3$, $y \leq 2x + 3$ ja $x \geq 1$.

Sovelluksia lineaarisesta optimoinnista

- Optimointitehtävän ratkaisuvaiheet:
  1) Muodosta optimoitava lauseke.
  2) Muodosta rajoitusehdot (epäyhtälöt) tehtävässä annettujen tietojen avulla.
  3) Esitä tilanne graafisesti.
  4) Laske muodostuneen alueen kärkipisteiden koordinaatit.
  5) Laske optimoitavan lausekkeen arvo tasoalueen kärkipisteissä.
  6) Ilmoita arvojen perusteella vastaus.

16. Eläinten ruokintaan on käytettävissä kahta eri rehua A ja B.

	Rehu A	Rehu B
Energia/kg	160	100
Rauta/kg	2	10
Hinta (€)	0,10	0,40

Eläinten on saatava rehuista vähintään 2200 yksikköä energiaa ja 150 yksikköä rautaa.

a) Muodosta optimoitava lauseke, kun rehujen kustannukset tulisi olla mahdollisimman pienet.

b) Muodosta rajoitusehdot, jotka kuvaavat rehujen määriin liittyviä ehtoja.

17. Kauneustuotteita myyvässä liikkeessä tehdään myyntiin kahdenlaisia lahjakoreja. Isompaan tuoksukoriin laitetaan 40 kylpykuulaa ja kolme kylpyvaahtopulloa. Pienempään tuoksukoriin laitetaan 20 kylpykuulaa ja yksi kylpyvaahtopullo. Myymälässä on kylpyvaahtopulloja käytettävissä korkeintaan 70 kappaletta. Kylpykuulia on kymmenen kappaleen rasioissa korkeintaan 100 rasiaa. Liike saa voittoa isommasta korista 3,10 € ja pienemmästä 1,50 €. Millaisia määriä kumpaakin koria tulisi myydä, jotta voitto olisi mahdollisimman suuri?

18. Yritys valmistaa nahkasalkkuja ja iltalaukkuja. Yhden iltalaukun valmistamiseen kuluu raaka-ainetta 500 g ja työaikaa 1 h. Yhden salkun valmistamiseen kuluu raaka-ainetta 4,0 kg ja työaikaa 3 h. Raaka-ainetta on käytettävissä 200 kg ja työaikaa 250 tuntia. Laukku maksaa asiakkaalle 50 € ja salkku 160 €. Millaisilla valmistusmäärillä myyntitulo on suurin?

Lukujono

- Kun lukuja asetetaan peräkkäin, muodostuu lukujono.
- Lukujono voi olla päättyvä tai päättymätön.
- Yleisen jäsenen a_n lauseke ilmoittaa säännön, jolla mikä tahansa lukujonon jäsen voidaan määrittää.

19. Määritä jonon 18. jäsen, kun jonon yleinen jäsen on
    a) $a_n = n^2 - 15n$ b) $a_n = \frac{2}{3n-15}$.

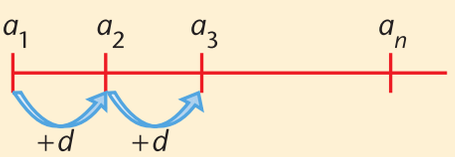
20. Onko luku 8 jonossa, jonka yleinen jäsen on
    a) $a_n = n^2 + 2n - 7$
    b) $a_n = 3n^2 + 4n + 2$?

21. Joni aloitti tenttiin valmistautumisen lukemalla 20 sivua. Seuraavina päivinä hän luki aina 4 sivua enemmän kuin edellisenä päivänä.
    a) Muodosta lukujono, joka kuvaa Jonin lukemia sivumääriä päivittäin.
    b) Muodosta jonon yleinen jäsen.
    c) Kuinka monta sivua Joni luki kahden viikon kuluttua?

22. Kiviportaille asetettiin kynttilöitä siten, että viimeisellä portaalla oli yksi kynttilä. Kynttilöiden määrät muodostivat lukujonon, jonka yleinen jäsen oli $41 - 4n$.
    a) Kuinka monta kynttilää oli 1. portaalla?
    b) Kuinka monella portaalla kynttilöitä oli?

Aritmeettinen lukujono

- Kahden peräkkäisen jäsenen erotus on aina vakio d (differenssi).
  $d = a_n - a_{n-1}$
- Yleinen jäsen on
  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
  - a_1 on jonon ensimmäinen jäsen
  - d on peräkkäisten jäsenten erotus



23. Määritä aritmeettisen jonon 1, –3, –7, –11, …
    a) yleinen jäsen b) 21. jäsen.

24. Onko luku
    a) –467 b) –673
    aritmeettisen jonon 67, 62, 57, 52, … jäsen?

25. Aritmeettisen lukujonon differenssi on 7 ja jonon 43. jäsen on –43. Kuinka moni jonon jäsenistä on pienempi kuin –100?

26. Satama-altaan syvyys heti laiturin vieressä on 2,90 m. Kun siirrytään kauemmas merelle, syvyys kasvaa aina metrin matkalla 40 cm.
    a) Mikä on syvyys, kun etäisyys rantaan on n metriä?
    b) Kuinka syvää on 120 m:n päässä rannasta?

Aritmeettinen summa

- Kun aritmeettisen jonon jäseniä lasketaan äärellinen määrä yhteen, saadaan aritmeettinen summa.
- Summan arvo on $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$.
  - a_1 on summan ensimmäinen jäsen
  - a_n on summan viimeinen jäsen
  - n on jäsenien lukumäärä

27. Laske summa.
    a) $92 + 124 + 156 + \ldots + 572$
    b) $101 + 95 + 89 + \ldots + (-61) + (-67)$

28. Laske aritmeettisen jonon 3, 5, 7, 9, … kuudenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

29. Elokuvaa kävi 1. esitysviikolla katsomassa 5550 katsojaa. Katsojien määrä vähenee joka viikko noin 450 katsojalla. Viikoittaisista katsojamääristä muodostuu aritmeettinen jono.
    a) Määritä tämän jonon yleinen jäsen.
    b) Kuinka monta katsojaa näki elokuvan ensimmäisen 12 viikon aikana?

30. Paikaltaan lähtevän kilpa-auton nopeus kasvaa siten, että 1. sekunnin aikana se liikkuu 2 m ja auton kulkema matka kasvaa jokaisen seuraavan sekunnin aikana 4 m. Nopeus vakiintuu 15 sekunnin kuluttua lähdöstä.
    a) Kuinka pitkän matkan auto kulkee ensimmäisen 15 sekunnin aikana?
    b) Mikä on auton keskinopeus viimeisen sekunnin aikana? Entä tutkittavan 15 sekunnin aikana? Ilmoita vastaus (km/h) kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Geometrinen lukujono

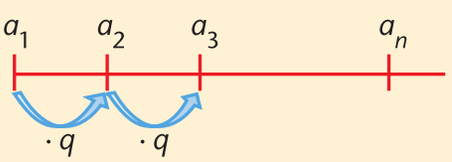
- Kahden peräkkäisen jäsenen suhde on vakio q (suhdeluku).

  $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

- Yleinen jäsen on

  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

  - a_1 on jonon ensimmäinen jäsen
  - q on peräkkäisten jäsenten suhde



31. Määritä geometrisen lukujonon 3, –15, 75, –375, …
    a) yleinen jäsen b) 8. jäsen.

32. Geometrisen lukujonon suhdeluku on 0,5 ja seitsemäs jäsen –6. Mikä on tämän lukujonon ensimmäinen jäsen?

33. Kuinka mones jäsen luku 1,458 on geometrisessa jonossa 2000, 600, 180, …?

34. Erään bakteeriviljelmän kahdentumisaika on 20 min. Missä ajassa 6 bakteerista on tullut 6 291 456 bakteeria?

35. Matkustajamäärän eräällä bussilinjalla ennustetaan vähenevän 3,4 % vuosittain. Jos matkustajamäärä viime vuoden lopussa oli 10 900,
    a) mikä on ennustettu matkustajamäärä kymmenen vuoden kuluttua
    b) kuinka monen vuoden kuluttua määrä ennusteen mukaan alittaa 6500 matkustajan rajan?

Geometrinen summa

- Kun geometrisen jonon jäseniä lasketaan äärellinen määrä yhteen, saadaan geometrinen summa.
- Summan arvo on $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.
  - a_1 on summan ensimmäinen jäsen
  - q on suhdeluku, $q \neq 1$
  - n on jäsenten lukumäärä
- Geometrisella lukujonolla voidaan kuvata tilanteita, joissa suhteellinen muutos pysyy samana. Tällaisia tilanteita ovat esimerkiksi lukumäärien prosentuaaliset muutokset.

36. Laske summa
    a) 5, 25, 125, …, 9 765 625
    b) $3 + 3 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}6^2 + 3 \cdot 0{,}6^3 + \ldots + 3 \cdot 0{,}6^{10}$
    neljän merkitsevän numeron tarkkuudella.

37. Kuinka monta geometrisen jonon 2; 2,6; 3,38; 4,394; … jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa ylittää 1000?

38. Heinäkuun ensimmäisenä päivänä Sanni poimi mansikkamaaltaan 25 l marjoja. Sateiden vuoksi sato pieneni seuraavina päivinä 5 % päivittäin. Kuinka monta litraa Sanni sai marjoja heinäkuun kahden ensimmäisen viikon aikana? Anna vastaus litran tarkkuudella.

39. Kummitäti tallettaa Villen syntymäpäivänä 120,00 € tilille joka vuosi yksivuotispäivästä lähtien. Tilin korko on 2,1 %, ja korko liitetään pääomaan vuosittain. Kuinka paljon tililtä on nostettavissa Villen 18-vuotispäivänä, kun viimeistä talletusta ei tehdä?

40. Kaupungin puutarhaan istutetaan kukantaimia 600 kappaletta. Taimista kuihtuu 20 % viikossa, joten niitä istutetaan 80 kappaletta lisää joka viikko. Kuinka monta tainta puutarhassa on 20 viikon kuluttua?

1. Harjoituskoe

1. a) Määritä suorien $-4x + 8y - 12 = 0$ ja $-5x + 6y + 5 = 0$ leikkauspiste.
   b) Määritä luvut x ja y, jotka toteuttavat yhtälöt $-4x + 20y + 5 = 0$ ja $15y = 5x - 10$.

2. Määritä aritmeettisen jonon 20, 17, 14, 11, 8, … yleinen jäsen. Kuinka moni jonon jäsenistä on suurempia kuin –50?

3. a) Aritmeettisen lukujonon 1, 4, 7, … eräs jäsen on 250. Kuinka mones jäsen tämä luku on?
   b) Määritä geometrisen jonon $3, 4\frac{1}{2}, 6\frac{3}{4}, \ldots$ kuudes termi ja viidentoista ensimmäisen termin summa. Anna vastaukset yhden desimaalin tarkkuudella.

4. Lukiolainen laatii itselleen kunto-ohjelman. Hän aloittaa 45 minuutin pituisella jaksolla ja lisää suoritusaikaa ohjelman mukaisesti joka kerralla 8,0 %.
   a) Kuinka pitkän ajan hän käyttää kuntoiluun 15. päivänä?
   b) Kuinka paljon hän käyttää kuntoiluun yhteensä aikaa 30 päivän aikana?

5. Epäyhtälöt $3x + y \leq 5$, $-x + y + 2 \geq 0$ ja $x - 1 \geq 0$ määrittävät tasoalueen. Missä alueen pisteessä lauseke $11x - 5y$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa. Mitkä nämä arvot ovat?

6. Ompelimo käyttää kahdentyyppistä koristelankaa. Uniikin takin kauluksessa pitää käytetyissä langoissa olla villaa vähintään 14 g. Keinokuitua pitää olla puolestaan vähintään 30 g. Koristelanka A sisältää villaa ja keinokuitua 20 g/metri. Koristelanka B sisältää villaa 10 g/metri ja keinokuitua 60 g/metri. Lanka A maksaa 30 €/metri ja lanka B 20 €/metri. Kuinka paljon eri lankalaatuja tulisi valita, jotta kulut olisivat mahdollisimman pienet?

2. Harjoituskoe

1. Kirjoita lukujonon viisi ensimmäistä termiä, kun
   a) jonon yleinen termi on $a_n = 4n^2 - 1$, $n = 1, 2, \ldots$
   b) jono on aritmeettinen sekä $a_1 = -7$ ja $d = -1$
   c) jono on geometrinen sekä $a_1 = \frac{1}{2}$ ja $q = -\frac{1}{3}$.

2. Ratkaise
   a) yhtälöpari $\begin{cases} 2a + 3b = -8 \\ 2a - b = 4 \end{cases}$
   b) epäyhtälöryhmä $\begin{cases} y \geq x + 2 \\ y < 3 \\ x \geq -4. \end{cases}$

3. Jari maalasi autotallia 14 h ja Pekka ulkovarastoa 10 h. Palkkaa pojat saivat yhteensä 110 €. Jos Jari olisi maalannut autotallia kolme tuntia enemmän ja Pekka ulkovarastoa tunnin vähemmän, olisi yhteenlaskettu palkka ollut 121 €. Kuinka suuret poikien tuntipalkat olivat?

4. Kuinka monta prosenttia suurempi on aritmeettisen lukujonon 2, 4, 6, 8, … 999 ensimmäisen termin summa kuin sen 888 ensimmäisen termin summa? [K2002, 4]

5. Liisa kertoo juorun puhelimessa kahdelle ystävälleen. Kumpikin heistä kertoo sen edelleen kahdelle muulle ystävälleen. Nämä jatkavat samoin soittaen kumpikin kahdelle omalle ystävälleen.
   a) Kuinka moni on kuullut juorun 10. soittokierroksen jälkeen?
   b) Kuinka monta soittokierrosta tarvitaan, jotta yli 5020 ihmistä on kuullut juorun?

6. Viivi on ottanut 72 000 € asuntolainan 3,3 %:n vuotuisella korolla. Hän lyhentää lainaa puolivuosittain 4500 €. Samalla hän maksaa siihen mennessä kertyneet korot. Kuinka paljon Viivi maksaa korkoa kaikkiaan? Kuinka monta vuotta lainan takaisinmaksu kestää?

3. Harjoituskoe

1. Kuuluuko luku 276 jonoon
   a) $a_n = 6n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$
   b) $a_n = -6 + 6(n - 1)$, $n = 1, 2, \ldots$
   c) $a_n = -2 \cdot 3^n$, $n = 1, 2, \ldots$?

2. Kaupunkien A ja B asukasmäärä on nyt 47 000. Ennusteen mukaan kaupungista A vähenee 107 asukasta vuodessa. Kaupungin B asukasmäärä puolestaan ennusteen mukaan lisääntyy 1,5 % vuosittain.
   a) Kuinka monta asukasta kaupungeissa A ja B on ennusteen mukaan 15 vuoden päästä?
   b) Kuinka monta prosenttia kaupungin B asukasluku on noussut 15 vuoden aikana?

3. Teatterissa on 50 penkkiriviä. Ensimmäisellä rivillä on 19 paikkaa ja seuraavilla riveillä aina kaksi enemmän edelliseen verrattuna. Paikat on numeroitu järjestyksessä alkaen aina riveittäin vasemmalta.
   a) Kuinka monta paikkaa teatterissa on?
   b) Millä rivillä on paikkanumero 1056, ja kuinka mones paikka se on vasemmalta lukien?

4. Ratkaise graafisesti epäyhtälöryhmä $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq -y \\ 2y - x \leq 6 \\ 3x + y \leq 3 \end{cases}$ ja laske syntyneen alueen pinta-ala. [K2003, 9]

5. Tehdas valmistaa tuoleja ja pöytiä. Pöydän valmistukseen kuluu aikaa 9,6 h ja tuolin valmistukseen 8 h. Erän valmistukseen on kokonaisuudessaan käytettävissä aikaa 160 h. Tuolin maalaus kestää 3 h ja pöydän 6 h. Erän maalaukseen on käytettävissä aikaa 90 h. Kuinka monta tuolia ja pöytää kannattaa valmistaa, kun pöydän hinta on 150 € ja tuolin 100 €?

6. Tuomon täti tallettaa Tuomon syntymäpäivinä 100 € tilille, jonka 2,5 prosentin korko on sovittu kiinteäksi. Ensimmäinen talletus tehdään 1-vuotispäivänä. Kuinka paljon tilillä on rahaa Tuomon 18-vuotispäivänä, jos tililtä ei aiemmin tehdä nostoja?

Epälineaarinen yhtälöpari

Yhtälöparia kutsutaan **epälineaariseksi**, jos yhtälöiden kaikki termit eivät ole ensimmäistä astetta. Tällainen yhtälöpari ratkaistaan useimmiten sijoitusmenetelmällä.

ESIMERKKI 1

Määritä paraabelin $y = x^2 - 2x + 8$ ja suoran $y - 4x + 1 = 0$ leikkauspisteet.

RATKAISU

Leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

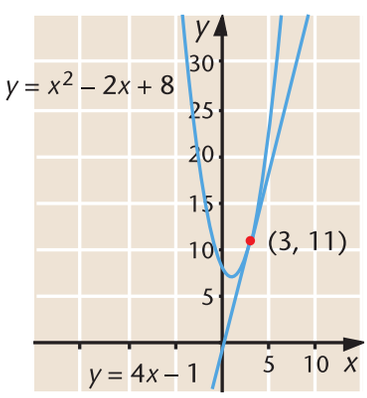
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 8 \\ y - 4x + 1 = 0 \end{cases}$$

Sijoittamalla päädytään toisen asteen yhtälöön.

$$(x^2 - 2x + 8) - 4x + 1 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = 3$$



Ratkaistaan y-koordinaatti sijoittamalla $x = 3$ toiseen alkuperäisistä yhtälöistä, esimerkiksi yhtälöön $y - 4x + 1 = 0$.

$$y - 4 \cdot 3 + 1 = 0$$

$$y = 11$$

Käyrillä on yksi leikkauspiste, joka on (3, 11).

VASTAUS

(3, 11)

ESIMERKKI 2 Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 1 \\ 3x + y = -1. \end{cases}$

RATKAISU Sijoittamalla päädytään toisen asteen yhtälöön, joka ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$$3x + (-x^2 - 2x + 1) = -1$$
$$-x^2 + x + 2 = 0$$

Yhtälö $ax^2 + bc + c = 0$ ratkaistaan kaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$$
$$x = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$
$$x = \frac{-1+3}{-2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-3}{-2} = 2$$

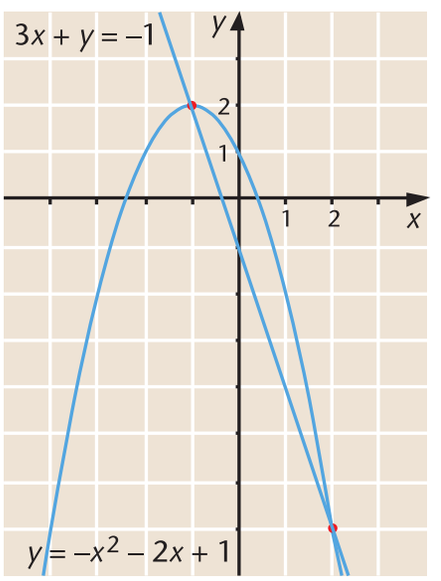
Ratkaistaan y-koordinaattien arvot sijoittamalla arvot $x = -1$ ja $x = 2$ esimerkiksi yhtälöön $3x + y = -1$.

$x = -1$

$3 \cdot (-1) + y = -1$
$y = -1 + 3 = 2$

$x = 2$

$3 \cdot 2 + y = -1$
$y = -1 - 6 = -7$



VASTAUS $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = 2 \\ y = -7 \end{cases}$

Tehtäviä

1. Ratkaise yhtälöpari.

   a) $\begin{cases} y = -3x - 1 \\ y = -x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ -y + x^2 + 4 = 0 \end{cases}$

2. Määritä suoran ja paraabelin leikkauspisteet.
   a) $y = 2x + 5, \quad y = x^2 + 2x - 4$
   b) $y = -4x + 3, \quad y = -x^2 - x + 3$

3. Ratkaise yhtälöpari.

   a) $\begin{cases} y + x^2 = 5x - 2 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + 8x + 4 = 0 \\ y - 2x^2 = 3x + 1 \end{cases}$

4. Määritä suoran $y - 2x + 4 = 0$ ja paraabelin $y = x^2 - 3x + 2$ leikkauspisteet.

Yhtälöryhmän ratkaiseminen

Kolmen tai useamman yhtälön yhteinen ratkaisu saadaan ratkaisemalla niiden muodostama **yhtälöryhmä**. Esimerkiksi yhtälöiden $x-y+z=-6$, $4x+2y+2z=-2$ ja $4x-2y+5z=-15$ yhteinen ratkaisu saadaan ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x-y+z=-6 \\ 4x+2y+2z=-2 \\ 4x-2y+5z=-15 \end{cases}$$

Yhtälöryhmä sisältää tavallisesti yhtä monta tuntematonta ja yhtälöä. Tällöin yhtälöryhmälle saadaan yleensä yksikäsitteinen ratkaisu.

Yhtälöryhmän ratkaisussa voidaan erottaa seuraavat vaiheet:

1. Muodostetaan yhtälöistä kaksi erilaista yhtälöparia ja eliminoidaan niistä sama tuntematon. Valitaan ensimmäiseen yhtälöpariin kaksi ensimmäistä yhtälöä ja toiseen kaksi jälkimmäistä yhtälöä.

Tuntematon z eliminoidaan pois molemmista yhtälöpareista.

I yhtälöpari

$$\begin{cases} x-y+z=-6 & \mid \cdot(-2) \\ 4x+2y+2z=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x+2y-2z=12 \\ 4x+2y+2z=-2 \end{cases}$$

$$2x+4y=10$$

II yhtälöpari

$$\begin{cases} 4x+2y+2z=-2 & \mid \cdot(-5) \\ 4x-2y+5z=-15 & \mid \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20x-10y-10z=10 \\ 8x-4y+10z=-30 \end{cases}$$

$$-12x-14y=-20$$

Näin on saatu kaksi yhtälöä, joissa esiintyy vain kaksi tuntematonta, x ja y.

2 Muodostetaan saaduista yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan se.

$$\begin{cases} 2x+4y=10 \\ -12x-14y=-20 \end{cases} \quad \big| \cdot 6$$

Ratkaistaan yhtälöpari eliminoimalla x, koska sen kertoimet on helpompi saada toistensa vastaluvuiksi.

$$\begin{cases} 12x+24y=60 \\ -12x-14y=-20 \end{cases}$$

$$10y=40 \quad \big| :10$$

$$y=4$$

Sijoitetaan saatu arvo jompaankumpaan yhtälöparin yhtälöön.

$$2x+4y=10$$

$$2x+4\cdot 4=10$$

$$2x=-6 \quad \big| :2$$

$$x=-3$$

3 Sijoitetaan yhtälöparin ratkaisuna saadut arvot $x=-3$ ja $y=4$ johonkin alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön.

$$x-y+z=-6$$

$$-3-4+z=-6$$

$$z=1$$

Yhtälöryhmä toteutuu, kun $x=-3$, $y=4$ ja $z=1$.

Yhtälöryhmää ratkaistaessa kannattaa edetä seuraavien vaiheiden mukaan.

1. Muodosta ensin kaksi erilaista yhtälöparia. Eliminoi kummastakin yhtälöparista sama tuntematon.

2. Muodosta eliminoinnin jälkeen saaduista yhtälöistä uusi yhtälöpari ja ratkaise tämän yhtälöparin avulla kaksi tuntematonta.

3. Sijoita yhtälöparin ratkaisuna saadut arvot johonkin alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön ja ratkaise kolmas tuntematon.

ESIMERKKI 1

Jenna, Pirita ja Titta harrastavat ratsastusta, ja heillä on omat hevoset. Hevosten yhteenlaskettu ikä on 19 vuotta. Kaksi vuotta sitten Piritan hevonen oli kaksi kertaa niin vanha kuin Titan. Viisi vuotta sitten Jennan hevosen ikä oli kolmasosa Piritan hevosen iästä. Kuinka vanhoja hevoset ovat nyt?

RATKAISU

Kysytään kolmen hevosen ikää. Merkitään niitä tuntemattomilla.

x = Jennan hevosen ikä
y = Piritan hevosen ikä
z = Titan hevosen ikä

Tarkastellaan taulukon avulla tilannetta 2 vuotta ja 5 vuotta sitten.

	Jennan hevonen	Piritan hevonen	Titan hevonen
Nyt	x	y	z
2 vuotta sitten	$x-2$	$y-2$	$z-2$
5 vuotta sitten	$x-5$	$y-5$	$z-5$

Muodostetaan tehtävissä annetuista tiedoista yhtälöt:

- Yhteenlaskettu ikä nyt: $x+y+z=19$.
- Tilanne 2 vuotta sitten: $y-2=2(z-2)$.
- Tilanne 5 vuotta sitten: $x-5=\frac{1}{3}(y-5)$.

Nämä kolme yhtälöä muodostavat yhtälöryhmän:

$$\begin{cases} x+y+z=19 \\ y-2=2z-4 \\ x-5=\frac{1}{3}y-\frac{5}{3} \end{cases}$$

Siirretään yhtälöissä termejä niin, että tuntemattomat ovat vasemmalla ja vakiot oikealla puolella.

$$\begin{cases} x+y+z=19 \\ -y+2z=2 \\ x-\frac{1}{3}y=3\frac{1}{3} \end{cases}$$

Kaikki yhtälöt eivät sisällä kaikkia muuttujia, joten muodostetaan ensin vain yksi yhtälöpari. Eliminoidaan tuntematon z kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä.

$$\begin{cases} x+y+z=19 & \mid \cdot(-2) \\ -y+2z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x-2y-2z=-38 \\ \quad -\ y+2z=2 \end{cases}$$

$$-2x-3y=-36$$

Muodostetaan yhtälöpari viimeisen alkuperäisen yhtälön kanssa.

$$\begin{cases} -2x-3y=-36 \\ x-\frac{1}{3}y=3\frac{1}{3} & \mid \cdot(-9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x-3y=-36 \\ -9x+3y=-30 \end{cases}$$

$$-11x=-66 \quad \mid \cdot(-11)$$

$$x=6$$

Ratkaistaan y sijoittamalla saatu arvo yhtälöparin jompaankumpaan yhtälöön. Sijoitetaan $x=6$ yhtälöön $-2x-3y=-36$.

$$-2\cdot 6-3y=-36$$

$$-3y=-24 \quad \mid :(-3)$$

$$y=8$$

Ratkaistaan z sijoittamalla saadut arvot johonkin alkuperäisistä yhtälöistä. Sijoitetaan $y=8$ yhtälöön $-y+2z=2$.

$$-8+2z=2$$

$$2z=10$$

$$z=5$$

Hevosten iät ovat siis $x=6$ (vuotta), $y=8$ (vuotta), $z=5$ (vuotta).

Vastaus Jennan hevonen on 6 vuotta, Piritan 8 vuotta ja Titan 5 vuotta.

ESIMERKKI 2 Määritä sellaiset vakiot a, b ja c, että paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ kulkee pisteiden $(-4, 49)$, $(2, 7)$ ja $(1, 4)$ kautta.

RATKAISU Paraabelin yhtälössä on kolme tuntematonta a, b ja c. Koska tuntemattomia on kolme, tarvitaan yhtälöitäkin kolme.

Pisteet kuuluvat paraabelille, joten ne toteuttavat sen yhtälön. Sijoitetaan pisteet siis paraabelin yhtälöön $y = ax^2 + bx + c$.

Piste	Muuttujien arvot	Sijoitus
$(-4, 49)$	$x = -4$ $y = 49$	$49 = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c$ $49 = 16a - 4c + c$
$(2, 7)$	$x = 2$ $y = 7$	$7 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$ $7 = 4a + 2b + c$
$(1, 4)$	$x = 1$ $y = 4$	$4 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$ $4 = a + b + c$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 16a - 4b + c = 49 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ a + b + c = 4 \end{cases}$$

Muodostetaan yhtälöistä kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä sama tuntematon. Valitaan ensimmäiseen yhtälöpariin kaksi ensimmäistä yhtälöä ja toiseen kaksi jälkimmäistä yhtälöä.

Tuntematon c eliminoidaan pois molemmista yhtälöpareista.

I yhtälöpari

$$\begin{cases} 16a - 4b + c = 49 \quad \vert \cdot(-1) \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16a + 4b - c = -49 \\ \quad 4a + 2b + c = 7 \end{cases}$$

$$-12a + 6b = -42$$

II yhtälöpari

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 7 \quad \vert \cdot(-1) \\ a + b + c = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a - 2b - c = -7 \\ \quad a + b + c = 4 \end{cases}$$

$$-3a - b = -3$$

Muodostuneista yhtälöistä saadaan uusi yhtälöpari.

$$\begin{cases} -12a + 6b = -42 \\ -3a - b = -3 \end{cases} \quad \big| \cdot 6$$

$$\begin{cases} -12a + 6b = -42 \\ -18a - 6b = -18 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -30a &= -60 \quad \big| \cdot (-30) \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu arvo toiseen yhtälöistä $-12a + 6b = -42$ ja $-3a - b = -3$.

Sijoitetaan $a = 2$ yhtälöön $-12a + 6b = -42$ ja ratkaistaan siitä a.

$$\begin{aligned} -12 \cdot 2 + 6b &= -42 \\ 6b &= -42 + 24 \\ 6b &= -18 \quad \big| : 6 \\ b &= -3 \end{aligned}$$

Viimeinen tuntematon c saadaan, kun sijoitetaan saadut arvot $a = 2$ ja $b = -3$ johonkin alkuperäisistä yhtälöistä. Sijoitetaan ne esimerkiksi yhtälöön $a + b + c = 4$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 2 + (-3) + c &= 4 \\ c &= 4 + 1 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

Koska $a = 2$, $b = -3$ ja $c = 5$, paraabelin yhtälö on

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= 2x^2 - 3x + 5 \end{aligned}$$

VASTAUS $a = 2$, $b = -3$ ja $c = 5$, jolloin paraabelin yhtälö on $y = 2x^2 - 3x + 5$.

Tehtäviä

5. Ratkaise yhtälöryhmä.

a) $\begin{cases} 5a+b+3c=1 \\ 4a+2b+c=2 \\ -4a-5b+2c=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a+b+c=-5 \\ 9a-3b+5c=-49 \\ 4a-2b+c=-20 \end{cases}$

6. Ratkaise yhtälöryhmä.

a) $\begin{cases} -x+3y+4z=2 \\ x+2y+z=1 \\ -2x+y+4z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y+2z=1 \\ 3x+y+2z=4 \\ -x+6y+4z=1 \end{cases}$

7. Määritä luvut x, y ja z, jotka toteuttavat yhtälöt $2x-2y+4z=2$, $3x+y+3z=1$ ja $-2x+3y+4z-1=0$.

8. Määritä sen paraabelin yhtälö, joka kulkee pisteiden
   a) $(-5,-81)$, $(1,-3)$ ja $(2,-4)$
   b) $(-2,-1)$, $(1,2)$ ja $(2,-1)$ kautta.

9. Markuksen, Timon ja Pekan yhteenlaskettu ikä on 99 vuotta. Kaksi vuotta sitten Markus oli kaksi kertaa niin vanha kuin Pekka. Markus on seitsemän vuotta vanhempi kuin Timo. Kuinka vanhoja Markus, Timo ja Pekka ovat nyt?

10. Teatterilippujen hinnat ovat seuraavat: aikuiset 10 €, eläkeläiset 7 € ja lapset 5 €. Illan lipputulot ovat 515 €. Jos aikuisten määrä pysyisi samana, eläkeläisiä olisi viisi henkilöä enemmän ja lapsia kaksinkertainen määrä, tulot olisivat 625 €. Jos taas eläkeläisiä olisi puolet vähemmän, lapsia kolmasosa ja aikuisia 20, lipputulot olisivat 295 €. Kuinka monta aikuista, eläkeläistä ja lasta teatterissa on ollut?

11. Marja kerää omalta kasvimaaltaan Millalle herkkukorin, joka sisältää mansikoita, porkkanoita ja herneitä. Hän punnitsee tuotteiden yhteispainoksi 2,50 kg. Jos mansikoita olisi ollut 30 % enemmän, porkkanoita puolet vähemmän ja herneiden määrä olisi pysynyt samana, kori painaisi 2,46 kg. Jos taas mansikoita olisi ollut 40 % vähemmän, herneitä 20 % enemmän ja porkkanoiden määrä olisi pysynyt samana, kori painaisi 2,12 kg. Kuinka paljon korissa on kutakin tuotetta?

12. Petra teki mehua yhdistämällä kahta mehutiivistettä ja vettä. Juoman tilavuus oli 2,2 l. Jos appelsiinitiivistettä olisi puolet vähemmän ja omenatiivistettä kolmasosa alkuperäisestä määrästä, voi vettä laittaa 9 dl vähemmän. Juomaa saataisiin tällöin 9 dl. Mikäli appelsiinitiivistettä laitettaisiin 50 % enemmän ja omenatiivistettä nelinkertainen määrä, voisi vettä laittaa kaksinkertaisen määrän ja juomaa saataisiin 4,8 l. Kuinka paljon juomassa oli mehutiivistettä ja kuinka paljon vettä?

Rekursiivinen lukujono

POHDINTA 1

Syyskuun ensimmäisellä viikolla yksi päiväkodin lapsista sairastui flunssaan. Toisella viikolla päiväkodista löytyi toinenkin flunssaan sairastunut. Seuraavina viikkoina flunssa etenee niin, että jokaisella seuraavalla viikolla uusia flunssaan sairastuneita lapsia on saman verran kuin kahtena edellisenä viikkona yhteensä. Taulukoi sairastuneiden lukumääriä viikoittain syyskuun alusta alkaen.

Viikko	Uusien sairastuneiden määrä	
1	1	a_1
2	1	a_2
3	1 + 1 = 2	$a_3 = a_2 + a_1$
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Uusien sairastuneiden määrä viikolla n on

$a_n =$

Kappaleessa 2.1. (Lukujono) määritettiin jonolle yleinen jäsen a_n, jonka avulla voidaan laskea mikä tahansa jonon jäsen. Jos esimerkiksi $a_n = 10n - 8$, niin jonon 100. jäsen saadaan sijoittamalla $n = 100$ eli

$$a_{100} = 10 \cdot 100 - 8 = 992$$

Tällaista sääntöä, jolla mielivaltainen jäsen voidaan määrittää, sanotaan **analyyttiseksi**.

Jonon jäsen voidaan ilmoittaa myös toisella tavalla. Tällöin annetaan yksi tai useampia jäseniä jonon alusta ja ilmoitetaan lisäksi, miten seuraavat jäsenet lasketaan edellisten avulla. Tällaista sääntöä sanotaan **rekursiiviseksi**.

Kuuluisa Fibonaccin jono voidaan määritellä rekursiivisesti.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Fibonaccin jonon jäsen kolmannesta eteenpäin on aina kahden edellisen jäsenen summa.

n	a_n
1	1
2	1
3	$a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$
4	$a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$
5	$a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

Kun jonon kaksi ensimmäistä jäsentä annetaan, seuraavat voidaan laskea **rekursiosäännön** avulla.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\quad n = 3, 4, 5, \ldots,$$

Tässä jäsen a_{n-1} on jäsentä a_n edeltävä jäsen ja a_{n-2} on taas tätä edeltävä jäsen.

Esimerkki 1 Määritä jonon viisi ensimmäistä jäsentä, kun

a) $a_1 = 5$, $a_n = 4a_{n-1} - 3$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

b) $a_1 = 1$ ja $a_2 = 3$, $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $n = 3, 4, 5, \ldots$

Ratkaisu

a) Jonon ensimmäinen jäsen on 5. Toisesta jäsenestä lähtien käytetään rekursiosääntöä $a_n = 4a_{n-1} - 3$.

$$a_2 = 4a_1 - 3 = 4 \cdot 5 - 3 = 17$$
$$a_3 = 4a_2 - 3 = 4 \cdot 17 - 3 = 65$$
$$a_4 = 4a_3 - 3 = 4 \cdot 65 - 3 = 257$$
$$a_5 = 4a_4 - 3 = 4 \cdot 257 - 3 = 1025$$

b) Jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat 1 ja 3. Kolmannesta jäsenestä lähtien käytetään rekursiosääntöä $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

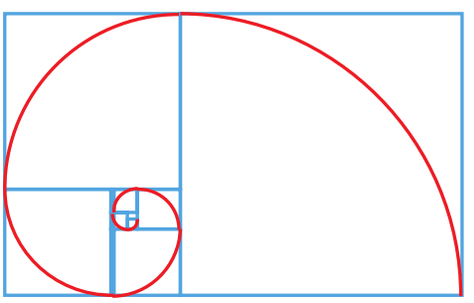
$$a_3 = -a_2 + 2a_1 = -3 + 2 \cdot 1 = -1$$
$$a_4 = -a_3 + 2a_2 = -(-1) + 2 \cdot 3 = 7$$
$$a_5 = -a_4 + 2a_3 = -7 + 2 \cdot (-1) = -9$$

Vastaus a) 5, 17, 65, 257, 1025 b) 1, 3, –1, 7, –9

Fibonaccin jonolle löytyy runsaasti sovelluksia esimerkiksi taiteissa. Sillä on yhteys kultaiseen leikkaukseen, sillä jonon peräkkäisten jäsenien suhde lähestyy kultaisen leikkauksen suhdetta

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62$$

Kultainen leikkaus syntyy jaettaessa jana kahteen osaan siten, että pidemmän osan suhde lyhyempään osaan on sama kuin koko janan suhde pidempään osaan.



Myös luonnossa voidaan löytää Fibonaccin jonoja. On havaittu, että esimerkiksi monilla kasveilla siementen ja kukkien terälehtien määrät muodostavat tällaisen jonon.

ESIMERKKI 2

Ensimmäisen hellepäivän iltana uima-altaassa on 66 000 litraa vettä. Hellejakson aikana altaan vedestä haihtuu joka vuorokausi 0,40 %. Altaaseen lasketaan lisää vettä 100 litraa joka päivä korvaamaan haihtunut vesimäärä. Altaan päivittäiset vesimäärät muodostavat rekursiivisen jonon. Muodosta rekursiosääntö ja laske sen avulla, kuinka paljon altaassa on vettä viikon kuluttua hellejakson alkamisesta.

RATKAISU

Jonon ensimmäinen jäsen on 66 000. Seuraavan päivän vesimäärä on

$$a_2 = a_1 - 0{,}004 \cdot a_1 + 100 = 0{,}996a_1 + 100$$

Kolmannen päivän vesimäärä saadaan toisen päivän vesimäärän avulla:

$$a_3 = 0{,}996a_2 + 100$$

Kun hellejakso on kestänyt n päivää, altaassa on vettä

$$a_n = 0{,}996a_{n-1} + 100 \text{ (litraa)}$$

Lasketaan taulukkoon viikon vesimäärät.

n	a_n
1	66 000
2	$a_2 = 0{,}996 \cdot 66\,000 + 100 = 65\,836{,}00\ldots$
3	$a_3 = 0{,}996 \cdot 65\,836{,}00\ldots + 100 = 65\,672{,}66\ldots$
4	$a_4 = 0{,}996 \cdot 65\,672{,}66\ldots + 100 = 65\,509{,}97\ldots$
5	$a_5 = 0{,}996 \cdot 65\,509{,}97\ldots + 100 = 65\,347{,}93\ldots$
6	$a_6 = 0{,}996 \cdot 65\,347{,}93\ldots + 100 = 65\,186{,}53\ldots$
7	$a_7 = 0{,}996 \cdot 65\,186{,}53\ldots + 100 = 65\,025{,}79\ldots$

Altaassa on vettä 65 025,79… l ≈ 65 000 l, eli veden määrä on vähentynyt täyttämisestä huolimatta 1000 litraa.

VASTAUS

Rekursiosääntö on $a_n = 0{,}996a_{n-1} + 100$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ Viikon kuluttua altaassa on vettä 65 000 litraa.

Tehtäviä

13. Mitkä ovat jonon neljä ensimmäistä jäsentä, kun
    a) $a_n = -a_{n-1} + 1$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, ja $a_1 = 10$
    b) $a_n = 12a_{n-1} - 20$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, ja $a_1 = 4$?

14. Määritä a_6, kun
    a) $a_{n+1} = 2a_n + 4$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ja $a_1 = 6$
    b) $a_{n+2} = -5a_{n+1} - a_n + 13$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $a_1 = 1$ ja $a_2 = 2$.

15. Erään lukujonon jäsenet noudattavat samaa rekursiosääntöä kuin Fibonaccin lukujonossa. Määritä lukujonon kolme seuraavaa jäsentä, kun
    a) $a_1 = 10$ ja $a_2 = 15$
    b) $a_1 = -2$ ja $a_2 = 2$.

16. Jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat 1, 5 ja 12. Keksi jokin rekursiosääntö, joka sopii näihin lukuihin, ja laske sen avulla kolme seuraavaa jäsentä.

17. Eräällä Kaakkois-Suomen erämaa-alueella elää 50 sutta. Tutkijat ovat havainneet, että syntyvien susien lisäksi Venäjän puolelta siirtyy uusia susia alueelle. Näin susikanta kasvaa keskimäärin 20 % vuodessa. Alueelle on annettu kahdeksan sudenkaatolupaa vuodessa. Susien vuosittaiset määrät muodostavat rekursiivisen jonon. Määritä rekursiosääntö. Tutki sen avulla taulukoimalla susien määrän kehittymistä seuraavan 10 vuoden aikana.

Lukujono koordinaatistossa

Sekä aritmeettista että geometrista lukujonoa voidaan kuvata koordinaatistossa. Lukujonon kuvaaja koostuu vain yksittäisistä pisteistä, jotka saadaan, kun lasketaan lukujonon jäseniä.

ESIMERKKI 1

Aritmeettisen lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1$ ja differenssi $d = 2$. Määritä lukujonon kuusi ensimmäistä jäsentä yleisen termin lausekkeen avulla ja havainnollista niitä koordinaatistossa.

RATKAISU

Lukujonon yleinen jäsen on

aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

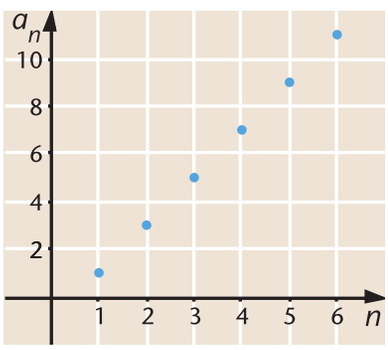
$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

Lasketaan yleisen jäsenen avulla lukujonon kuusi ensimmäistä jäsentä.

Jäsen $a_n = 2n - 1$	Koordinaatiston piste (n, a_n)
$a_1 = 1$	(1, 1)
$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$	(2, 3)
$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$	(3, 5)
$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$	(4, 7)
$a_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$	(5, 9)
$a_6 = 2 \cdot 6 - 1 = 11$	(6, 11)

Koordinaatistoon merkittävien pisteiden koordinaatit muodostuvat seuraavasti:
- x-koordinaatti on jäsenen järjestysnumero n
- y-koordinaatti on kyseisellä järjestysnumerolla oleva lukujonon jäsen a_n.

Merkitään pisteet koordinaatistoon.



aritmeettisen lukujonon $a_n = 2n - 1$ kuvaaja

Esimerkki 2

Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1$ ja suhdeluku $q = 2$. Määritä lukujonon kuusi ensimmäistä jäsentä yleisen termin lausekkeen avulla ja havainnollista niitä koordinaatistossa.

Ratkaisu

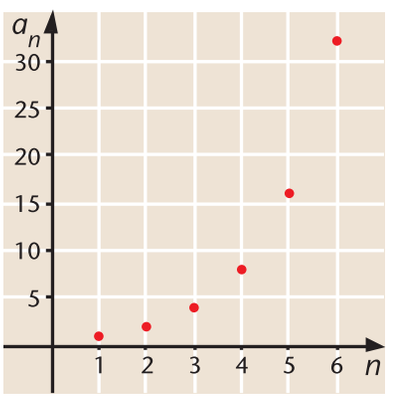
Lukujonon yleinen jäsen on

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

geometrisen lukujonon yleinen jäsen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Lasketaan yleisen jäsenen avulla lukujonon kuusi ensimmäistä jäsentä ja merkitään pisteet koordinaatistoon.

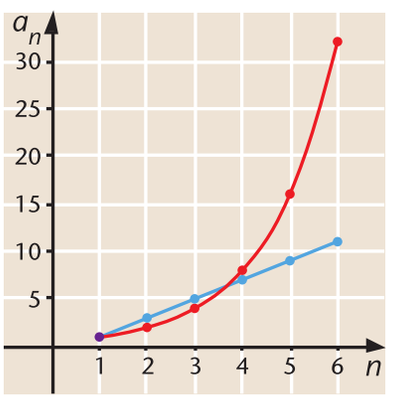
Jäsen $a_n = 2^{n-1}$	Koordinaatiston piste (n, a_n)
$a_1 = 1$	(1, 1)
$a_2 = 1 \cdot 2^{2-1} = 2$	(2, 2)
$a_3 = 1 \cdot 2^{3-1} = 4$	(3, 4)
$a_4 = 1 \cdot 2^{4-1} = 8$	(4, 8)
$a_5 = 1 \cdot 2^{5-1} = 16$	(5, 16)
$a_6 = 1 \cdot 2^{6-1} = 32$	(6, 32)



geometrisen lukujonon $a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$ kuvaaja

Aritmeettisen lukujonon jäsenet kasvavat joka kerta yhtä paljon eli tässä tapauksessa kahden yksikön verran, $d = 2$. Lukujonon kuvaajana olevat pisteet asettuvat kaikki samalle suoralle.

Geometrisessa lukujonossa suhteellinen muutos pysyy samana. Suhdeluku kertoo suhteellisen muutoksen, eli tässä tapauksessa kaksi, $q = 2$. Tästä syystä geometrisen lukujonon jäsenet saavat nopeammin suurempia arvoja kuin vastaavan aritmeettisen lukujonon jäsenet. Geometrisen lukujonon kuvaajana olevat pisteet asettuvat eksponenttifunktion kuvaajalle.



Tehtäviä

18. Kuvaa lukujonon viittä ensimmäistä jäsentä koordinaatistossa, kun jonon yleinen jäsen on
    a) $a_n = 4n + 2$ b) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ c) $a_n = 3 - 5n$.

19. Kahden kaupungin väkiluvut kasvavat seuraavasti:
    - Kaupungin A väkiluku kasvaa 200 asukkaalla vuodessa.
    - Kaupungin B väkiluku kasvaa 5,0 % vuodessa.

    Kaupungin A väkiluku oli vuoden 2004 alussa 35 000 asukasta ja kaupungin B 28 000 asukasta.
    a) Kuvaa kaupunkien vuosittaisia asukasmääriä lukujonoilla.
    b) Piirrä lukujonojen kuvaajat koordinaatistoon ja päättele, milloin kaupungin B asukasluku ylittää kaupungin A asukasluvun.

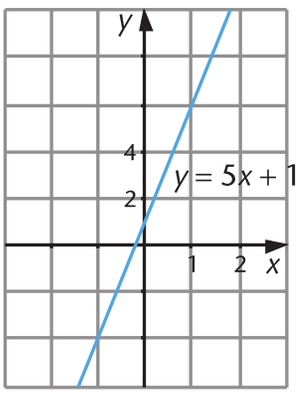
20. Leevi on luvannut maksaa itse osan ajokortistaan. Hän tallettaa säästöpossuun joka kuukausi rahaa ajokortin hankkimista varten. Leevi punnitsee kahta eri vaihtoehtoa:
    - Vaihtoehto A: Leevi tallettaa joka kuukausi 50 €.
    - Vaihtoehto B: Leevi tallettaa ensimmäisenä kuukautena 10 € ja tämän jälkeen aina niin paljon, että tilillä oleva summa kaksinkertaistuu.

    Piirrä eri vaihtoehtoja kuvaavien lukujonojen kuvaajat samaan koordinaatistoon.
    a) Kuinka monen kuukauden kuluttua kummankin vaihtoehdon mukaan Leevi on tallettanut tilille vähintään 1000 €?
    b) Mitkä ovat vaihtoehtojen edut ja haitat?

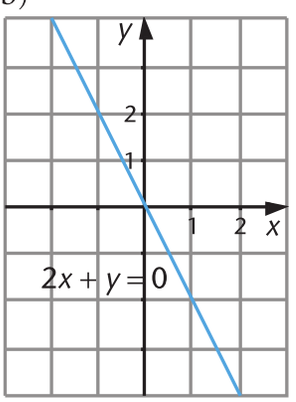
Tehtävien vastaukset

1.1 Kahden muuttujan lineaarinen yhtälö

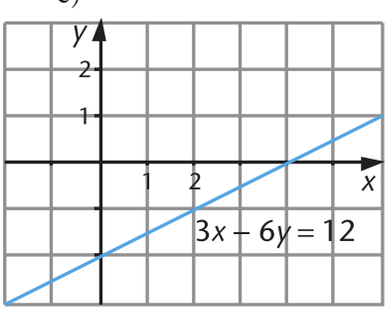
1. a)



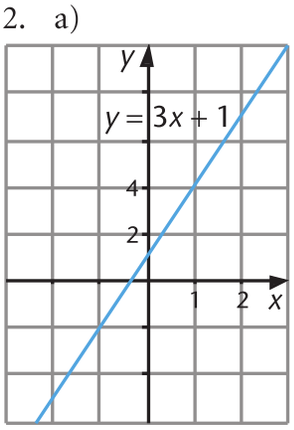
b)



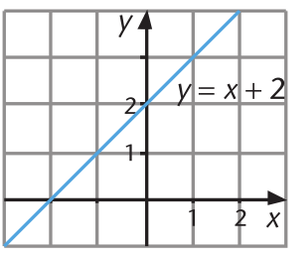
c)



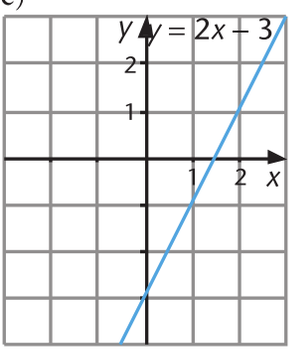
2. a)



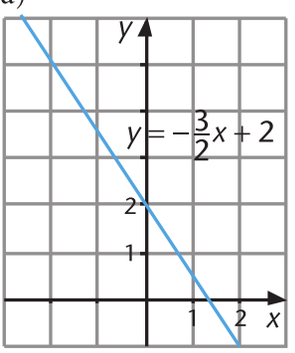
b)



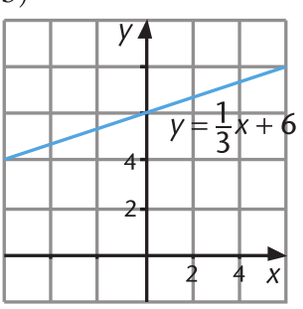
c)



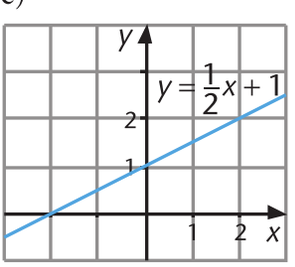
3. a)



b)



c)



4. $(0, -2)$ ja $(\frac{6}{5}, 0)$

5. $(0, 4)$ ja $(-\frac{4}{3}, 0)$

6. $k = \frac{2}{3}$

7. $(1, 6)$

8. a) $(-2, -2)$ b) $(1, -1)$

9. $(-2, 0)$, toteuttaa

10. $x + y = 24$

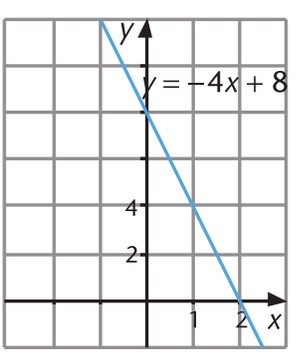
11. $4x + 6y = 240$, jossa x on neljän pullan pussien lukumäärä ja y on kuuden pullan pussien lukumäärä.

12. a) $2x + 4y = 48$, jossa x on ankkojen lukumäärä ja y on vuohien lukumäärä.
    b) 12 ankkaa

13. a) $2{,}00x + 2{,}50y = 200$, jossa x on 2,00 euron arpojen määrä ja y on 2,50 euron arpojen määrä.
    b) 32 kappaletta

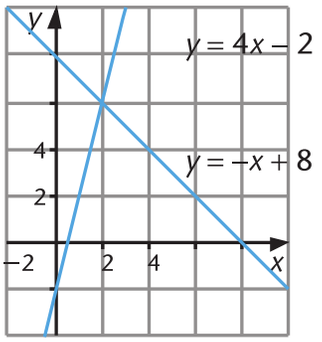
14. a) $50x + 100y = 1600$, jossa x on kaksioiden ja y kolmioiden määrä.
    b) 11 kolmiota

15.

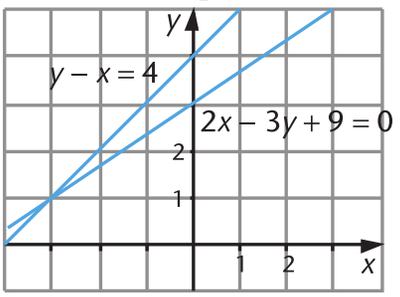


16. (0, 6) ja (3, 0)

17. a) leikkauspiste (2, 6)



b) leikkauspiste (–3, 1)



18. $8x + 4y = 120$, jossa x on tilataksien määrä ja y on normaalikokoisten taksien määrä.

19. a) $6x + 10y = 900$, jossa x on kuuden munan pakkausten määrä ja y on kymmenen munan pakkausten määrä.
b) 120 kappaletta

1.2 Yhtälöpari

20. a) $x = -1, y = -1$
b) $x = 17, y = 5$

21. a) $x = -1, y = 2$
b) $x = 3, y = -4$

22. $x = -1, y = -7$

23. a) $x = -2, y = -1$
b) $x = 0, y = -3$

24. a) (0, 1) b) (2, 6)

25. a) $t = 2, s = 5$
b) $t = \frac{5}{3}, s = \frac{1}{6}$

26. a) $x = 3, y = 3$
b) $x = 9, y = -12$

27. a) $x = -2, y = -1$
b) $x = 3, y = 5$

28. a) Ratkaisuna kaikki suoran $y = -x + 3$ pisteet
b) ei ratkaisua

29. a) ei leikkauspistettä
b) Leikkauspisteitä kaikki suoran $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ pisteet.

30. $x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2}$

31. 11 ja 35

32. autoja 15 kpl, polkupyöriä 38 kpl

33. 123 aikuisten lippua
57 lasten lippua

34. 24 mansikkatäytteistä ja 16 appelsiinitäytteistä

35. Beethoven 56, Mozart 35, Bach 65

36. paita 36 €, housut 52 €

37. laimeampaa liuosta 1,4 kg, väkevämpää liuosta 0,60 kg

38. 38,9 %

39. a) $x = -1, y = -1$
b) $x = \frac{7}{5}, y = \frac{6}{5}$

40. $x = 1, y = 0$

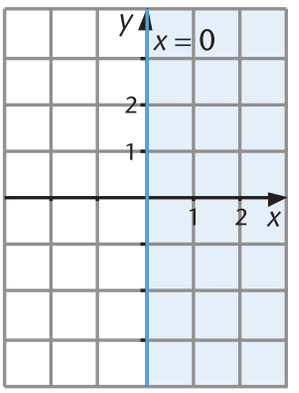
41. a) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
b) ei leikkauspistettä

42. kahvi 1,80 €, munkki 1,60 €

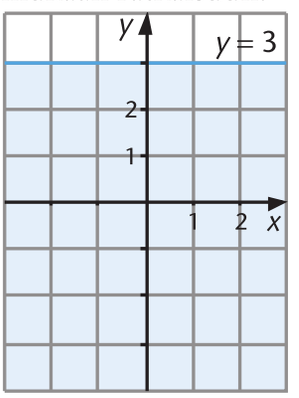
43. 72 kakkua, 104 piirakkaa

1.3 Kahden muuttujan lineaarinen yhtälö

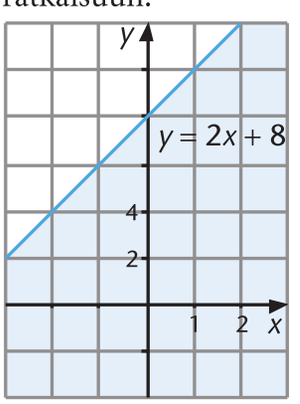
44. a) Suora ei kuulu mukaan ratkaisuun.



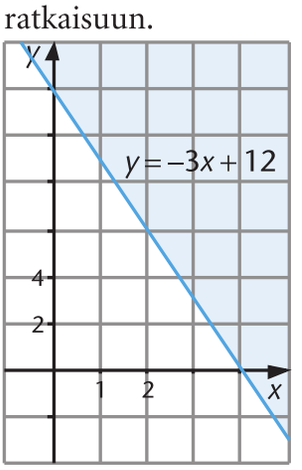
b) Suora ei kuulu mukaan ratkaisuun.



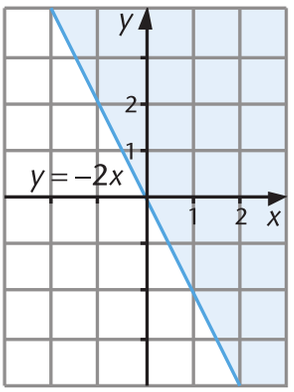
45. a) Suora kuuluu mukaan ratkaisuun.



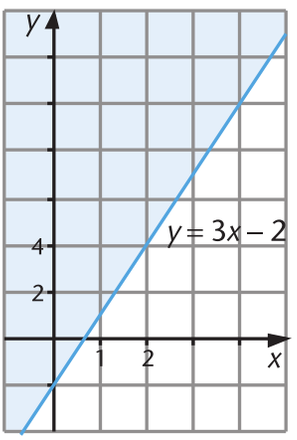
b) Suora kuuluu mukaan ratkaisuun.



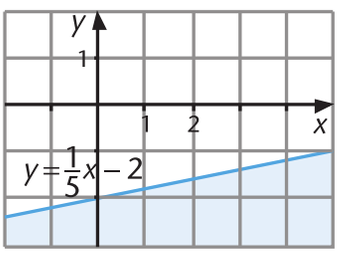
46. a) Suora ei kuulu mukaan ratkaisuun.



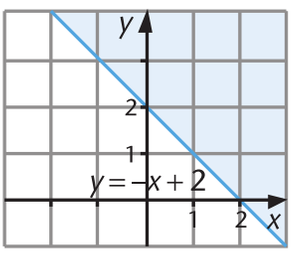
b) Suora ei kuulu mukaan ratkaisuun.



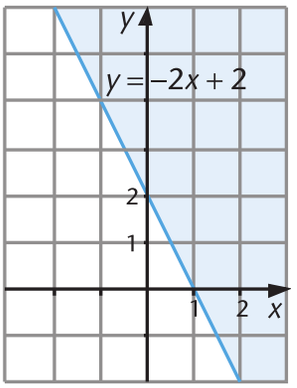
47. a) Suora ei kuulu mukaan ratkaisuun.



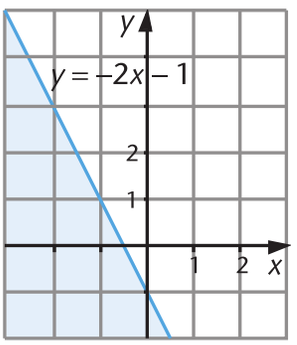
b) Suora kuuluu mukaan ratkaisuun.



48. a) Suora kuuluu mukaan ratkaisuun.



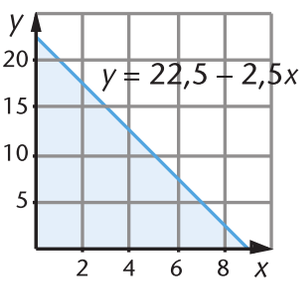
b) Suora kuuluu mukaan ratkaisuun.



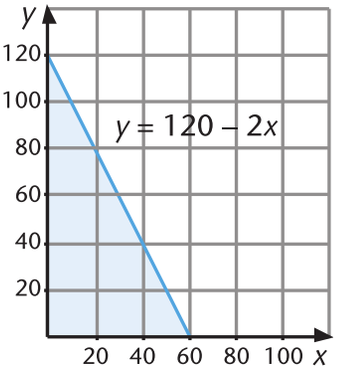
49. a) $y \leq 5$ b) $x \leq 3$

50. a) $y - 2x < 2$
b) $x + y < 4$

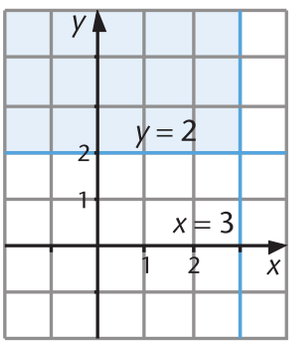
51. Epäyhtälö sievennettynä $y \leq 22{,}5 - 2{,}5x$, missä x on suurempi apuraha ja y pienempi.



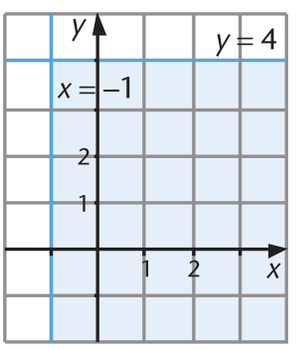
52. Epäyhtälö sievennettynä $y \leq 120 - 2x$, missä x on lohiannosten ja y pastaannosten määrä.



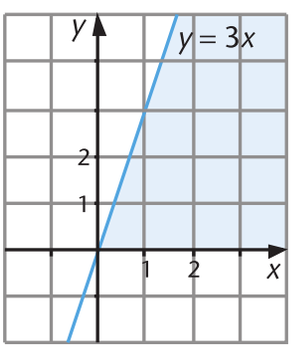
53. a) Suorat kuuluvat mukaan ratkaisuun.



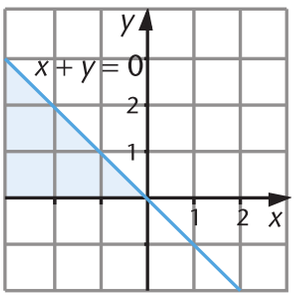
b) Suorat eivät kuulu mukaan ratkaisuun.



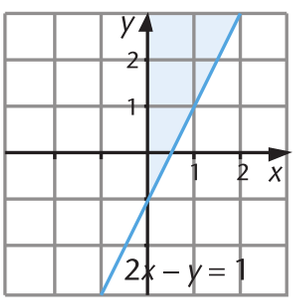
c) Suorat kuuluvat mukaan ratkaisuun.



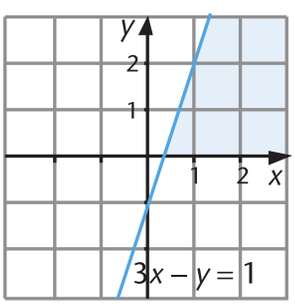
54. a) Suorat kuuluvat mukaan ratkaisuun.



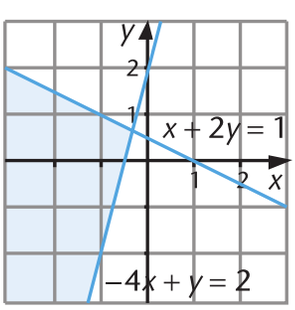
b) Suorat kuuluvat mukaan ratkaisuun.



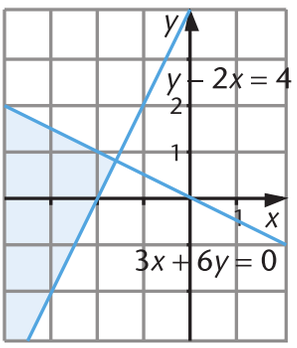
c) Suorat kuuluvat mukaan ratkaisuun.



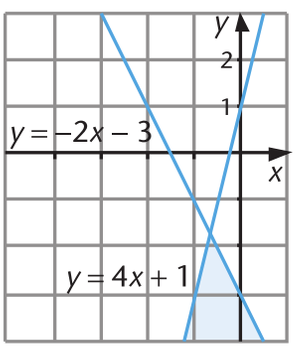
55. a) Suorat kuuluvat mukaan ratkaisuun.



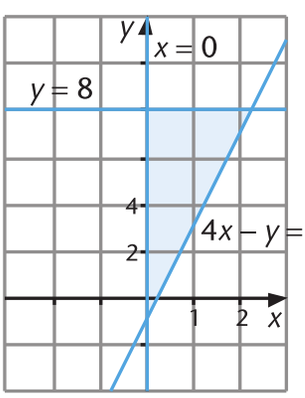
b) Suorat eivät kuulu mukaan ratkaisuun.



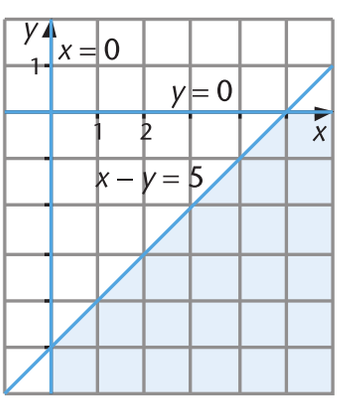
c) Suorat kuuluvat mukaan ratkaisuun.



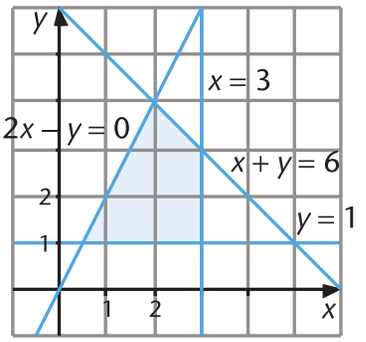
56. a) Suorat kuuluvat mukaan ratkaisuun.



b) Suorat kuuluvat mukaan ratkaisuun.



c) Suorat eivät kuulu mukaan ratkaisuun.



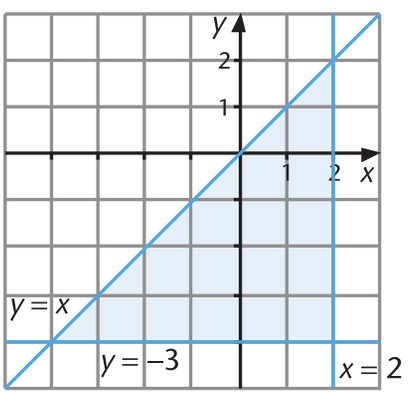
57. a) $\begin{cases} y < 5 \\ y > 0 \\ x > 0 \\ x < 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y > 0 \\ x < 3 \\ y < 1{,}5x \end{cases}$

58. a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 5 \\ y \leq 7 - x \end{cases}$

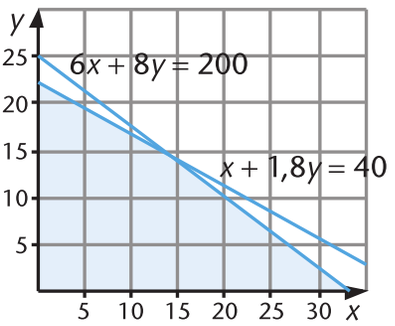
b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x - 2 \\ y \geq -x + 3 \end{cases}$

59. Alueen määrittävät epäyhtälöt $x < 2$, $y < x$ ja $y > -3$.



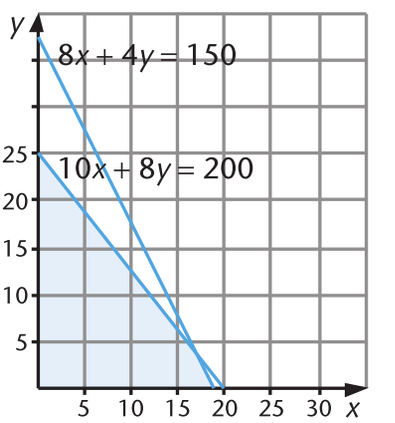
60. Jos pyöreitä ruukkuja on x kappaletta ja neliönmuotoisia ruukkuja y kappaletta, niin epäyhtälöt ovat

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 8y \leq 200 \\ x + 1{,}8y \leq 40 \end{cases}$$



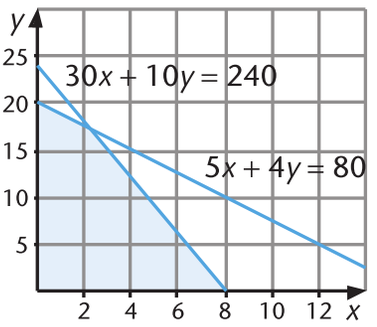
61. Jos suuria laatikostoja on x kappaletta ja pieniä y kappaletta, epäyhtälöt ovat

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 8y \leq 200 \\ 8x + 4y \leq 150 \end{cases}$$

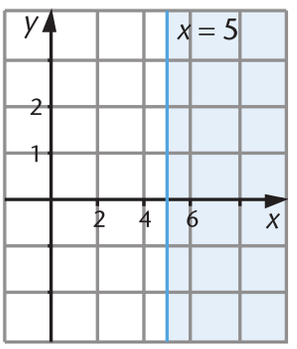


62. Jos kaulakoruja on x kappaletta ja rannekoruja y kappaletta, epäyhtälöt ovat

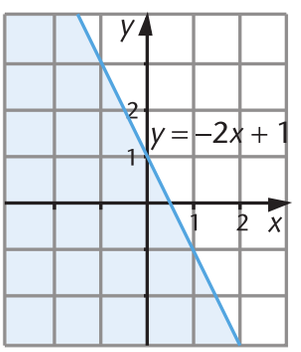
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 4y \leq 80 \\ 30x + 10y \leq 240 \end{cases}$$



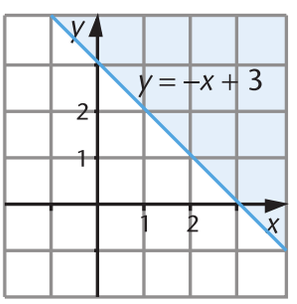
63. a) Suora ei kuulu mukaan ratkaisuun.



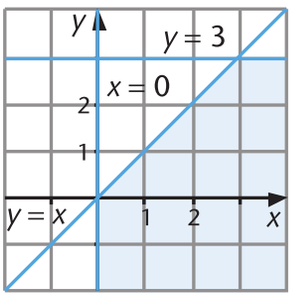
b) Suora ei kuulu mukaan ratkaisuun.



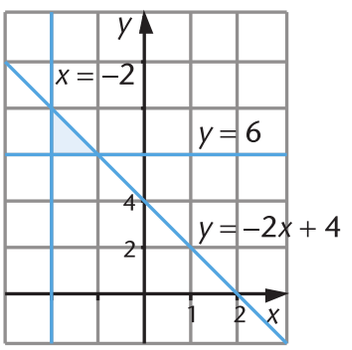
c) Suora kuuluu mukaan ratkaisuun.



64. a) Suorat eivät kuulu mukaan ratkaisuun.



b) Suorat kuuluvat mukaan ratkaisuun.

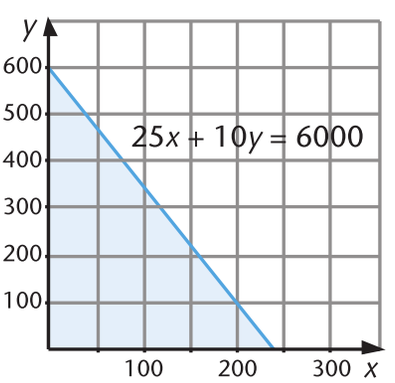


65. a) $y < -2x + 5$

b) $\begin{cases} x > 0 \\ y > \frac{3}{2}x - 2 \\ y < -\frac{1}{2}x + 7 \end{cases}$

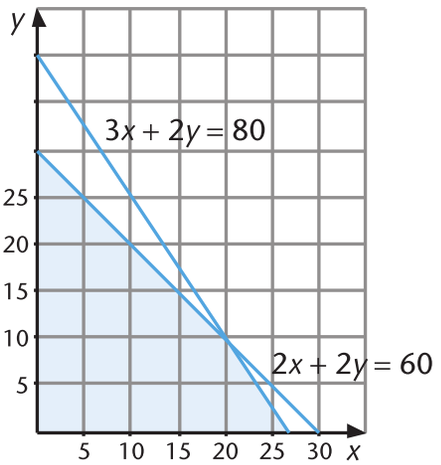
66. Jos x on isompien ja y on pienempien pakkausten määrä, epäyhtälöt ovat

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 25x + 10y \leq 6000 \end{cases}$$



67. Jos tasavoimakentällisiä on x kappaletta ja ylivoimakentällisiä y kappaletta, epäyhtälöt ovat

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 80 \\ 2x + 2y \leq 60 \end{cases}$$



1.4 Lausekkeen arvo tasoalueessa

68. a) suurin arvo 45, pienin arvo –5
    b) suurin arvo 30, pienin arvo –10

69. a) suurin arvo –8, pienin arvo –26
    b) suurin arvo 12, pienin arvo –80

70. a) ei suurinta arvoa, pienin arvo 4
    b) suurin arvo 12, ei pienintä arvoa

71. suurin arvo 12, ei pienintä arvoa

72. suurin arvo 12, pienin arvo 0

73. a) pisteessä (0, 10)
    b) pisteessä (5, 0)

74. suurin arvo 25, pienin arvo –2

75. suurin arvo 60, pienin arvo 6

76. a) –49 b) 2,8

77. suurin arvo 8,6 pisteessä (0, 4) ja pienin arvo –1,2 pisteessä (4,8; 0)

78. suurinta arvoa ei ole, pienin arvo 12

79. a) suurin arvo 16, pienin arvo –15
    b) suurin arvo 12, pienin arvo –17

80. suurin arvo 12, pienin arvo –10

81. suurin arvo 480 pisteessä (0, 20) ja pienin arvo 0 pisteessä (0, 0)

82. suurin arvo 71, pienin arvo 0

83. suurinta arvoa ei ole, pienin arvo –15

1.5 Sovelluksia lineaarisesta optimoinnista

84. a) $5{,}90x + 4{,}10y$

    b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 300x + 150y \leq 240\,000 \\ 200x + 300y \leq 300\,000 \end{cases}$

85. a) $15x + 20y$, kun x on t-paitojen lukumäärä ja y on sortsien lukumäärä

    b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0{,}80x + 0{,}20y \leq 52{,}00 \\ 0{,}30x + 0{,}50y \leq 29{,}70 \end{cases}$

86. a) $4{,}00x + 9{,}50y$
    b) 45 pienempää perhoa

87. a) $25\,000x + 40\,000y$
    b) 10 perheasuntoa

88. a) $50x + 140y$
    b) $x + 25y \leq 550$
    c) $10x + 25y \leq 1000$
    d) 50 henkilöautoa, 20 rekkaa

89. 11 suurta kimppua, 2 pientä kimppua

90. Valmistetaan 800 terveyspullaa ja 600 sämpylää. Jos valmistetaan pelkkiä sämpylöitä, vehnäjauhoja jää 21 kg yli ohrajauhojen loputtua.

91. a) $8{,}50x + 12{,}50y$, kun x on puolukkapiirakoiden lukumäärä ja y mustikkapiirakoiden lukumäärä

    b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0{,}2x + 0{,}35y \leq 7{,}5 \\ 15x + 20y \leq 480 \end{cases}$

92. a) $800x + 500y$
    b) 10 liikamiesluokan paikkaa, 60 turistiluokan paikkaa

93. uusikuosisia 9 kpl, vanhakuosisia 6 kpl, myynnin suurin arvo 1680 €

2.1 Lukujono

94. a) –68 b) 106,25

95. a) –4 b) 6 c) 29 300

96. a) –1, –7, –13
    b) 0, 2, 6
    c) 3, 9, 27

97. a) $100, 50, 25, 12\frac{1}{2}$
    b) –4, 4, –4, 4

98. a) 4, 6, 8, 10 (kpl)
b) 5,0; 4,5; 4,0; 3,5 (litraa)
c) 20 000, 24 000, 28 800, 34 560 (€)

99. a) 50 g, 25 g ja 12,5 g
b) $100 \cdot 0{,}5^n$
c) 3,05 mg

100. a) 1200, 1000, 800, 600, 400, 200, 0
b) $a_n = 1400 - 200n$

101. a) on, 155. jäsen
b) on, 15. jäsen

102. a) on b) on c) ei

103. a) 7. jäsen b) 20. jäsen
c) 4. jäsen

104. $c = -14$

105. a) 310 b) 20. rivissä
c) 26. rivi

106. a) 3,0; 3,4; 3,8; …
b) $a_n = 0{,}4n + 2{,}6$
c) 21. kerralla

107. a) −162 b) −1572

108. a) on, 5. jäsen
b) on, 8. jäsen
c) ei ole

109. a) $a_n = 5n$
b) $a_n = 103 - 3n$
c) $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10^{n-1}}$
d) $a_n = 3 \cdot (-1)^n$

110. Ei ylitä.

111. a) 2 b) 7. kuorelle

2.2 Aritmeettinen lukujono

112. a) 14 b) −4

113. a) kyllä ($d = 4$)
b) kyllä ($d = -6$)
c) ei
d) kyllä ($d = 18$)

114. $d = \frac{1}{5}$

115. a) $a_n = 2n + 1$
b) $a_n = 5n - 1$

116. a) $a_n = 5n - 37$
b) 133

117. a) $a_n = -9n + 17$
b) $a_n = -2n - 1$

118. a) $a_{120} = 491$ ($a_n = 4n + 11$)
b) $a_{120} = -255$ ($a_n = -2n - 15$)

119. a) 321. jäsen
b) 31

120. a) 177. jäsen
b) 125. jäsen

121. a) 132. jäsen
b) 161. jäsen

122. a) ei ole
b) on, 64. jäsen

123. a) $a_1 = -12$
b) $a_n = 4n - 16$

124. a) $a_1 = 16$, $d = -6$
b) $a_n = -6n + 22$

125. Ylin kerros on 30. Siinä on 30 kiveä.

126. a) $a_n = 4200 - 200n$
b) 21 kuukauden kuluttua

127. 22 kappaletta

128. a) $a_n = 30n + 70$
b) 1510 €

129. a) 175 mg
b) 16 päivää

130. a) $a_n = 6n - 16$
b) $a_n = -11n + 141$
c) $a_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$

131. a) on, 9. jäsen b) ei

132. $a_{1500} = -10\,488$

133. 31. viikolla

134. a) 17,8 km päässä
b) 128. pylväs

2.3 Aritmeettinen summa

135. a) 297 b) −525
c) 49 995 000 d) 5050

136. a) 1575 b) −1525

137. a) 4275 b) −3925

138. a) 1056 b) 71 725

139. $335\frac{5}{6}$

140. 47 jäsenen

141. 961

142. a) −162
b) $a_n = 7n - 169$

143. $a_n = 11n - 8$

144. a) 350 kappaletta
b) 6075 kappaletta

145. a) 165 150 b) 123 300

146. 45 km

147. a) 49 kappaletta
b) 98 m

148. 945 km

149. a) 12 b) 34 c) 20

150. yhteensä 16 kalaa

151. 11 riviä

152. a) 522 b) −27

153. a) 945 b) $55\frac{5}{6}$

154. 23

155. a) 25 päivää
b) 1625 mg

156. 18 kerrosta

2.4 Geometrinen lukujono

157. a) 5 b) -3
c) $-\frac{4}{5} = -0{,}8$
d) $\frac{1}{4} = 0{,}25$

158. a) $a_8 = 8748$, $a_1 = 4$, $q = 3$
b) $a_8 = -1{,}28 \cdot 10^{-5}$, $a_1 = -1$, $q = 0{,}2$

159. a) $a_n = 5 \cdot 7^{n-1}$

160. a) $a_9 = 78\,732$
b) $a_9 = -\frac{1}{128} = -0{,}007\,812\,5$

161. -7

162. a) $a_1 = 2$ b) $q = 5$

163. $a_{10} = -78\,732$ tai $a_{10} = 78\,732$

164. a) kuudes b) kymmenes

165. a) ei b) kyllä

166. a) $q = -3$ tai $q = 3$
b) -2 ja 6 tai 2 ja 6

167. -4 ja -8

168. 6,25 dm^2

169. 1,1 m

170. a) Emilian postimerkkien määrät muodostavat geometrisen jonon, Eeron aritmeettisen jonon.
b) Emilia 2048 merkkiä, Eero: 276 merkkiä

171. 31 kolikkoa

172. a) 1536
b) 18. kierroksella

173. a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
b) 6144
c) on, 16. jäsen

174. a) -512 b) 5 859 375

175. $a_1 = 78\,125$

176. $a_1 = 125$ ja $a_2 = 250$ tai $a_1 = 125$ ja $a_2 = -250$

177. a) 10,4 km b) 7,0 km
c) 2,9 km

2.5 Geometrinen summa

178. a) 21 845 b) -984
c) 3845,625

179. a) 765 b) $-16\,400$

180. a) 699 050 b) 290

181. a) 1,49 b) 14,2

182. 55 987

183. $\frac{3280}{729}$

184. $-5{,}22 \cdot 10^6$

185. a) 8190
b) 156 (huom. Lukujono on aritmeettinen.)

186. vähintään 9 jäsentä

187. a) vähintään 7
b) enintään 7

188. 156 250

189. 16 383 €

190. 26 799 €

191. a) 43
b) marraskuussa 2016

192. a) 10 553,14 €
b) 553,14 €

193. a) 49 mg b) 34 mg

194. 7 viikon kuluttua

195. 4 päivän jälkeen

196. 15 päivän kuluttua

197. Uusia asiakkaita viidessä viikossa 62, n viikossa $2^{n+1} - 2$. Aikaa kuluisi 13 viikkoa.

198. a) Kolmen ensimmäisen särmän pituus 1 m, $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{4}$ m ja n:n kuution särmän pituus $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ m
b) Korkeus näyttää lähestyvän lukua 2.

199. 2400 m^3

200. a) 1 048 575
b) 786 462

201. a) 97 655 b) 177 146

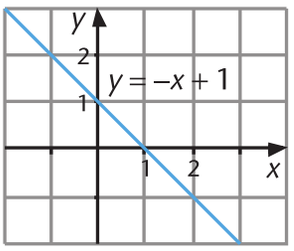
202. a) vähintään 6
b) enintään 7

203. 65 mm

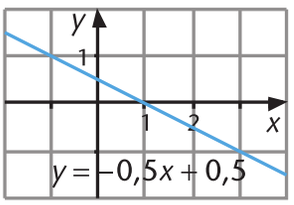
204. a) 21 232,48 €
b) 1232,48 €
c) 7 vuoden kuluttua

Kertausosa

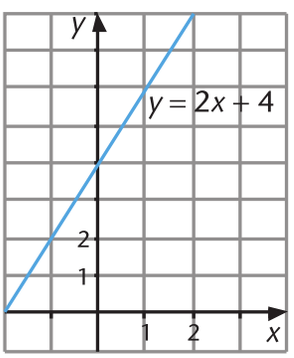
1. a)



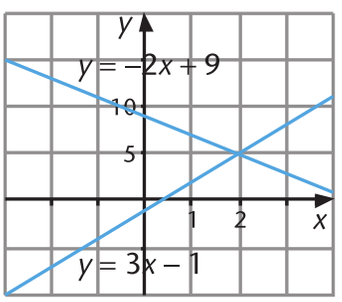
b)



c)

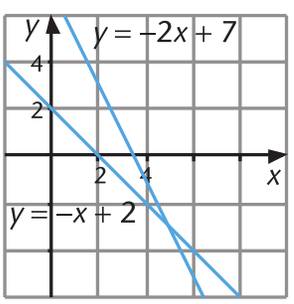


2. a)



leikkauspiste (2, 5)

b)



leikkauspiste (5, –3)

3. a) $6{,}0x + 7{,}0y = 5{,}0$ (€)
   x = merirosvorahat
   y = suklaakonvehdit
   b) 600 g

4. a) $(0, -1)$ ja $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
   b) $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ ja $(2, 0)$

5. a) $x = -15$, $y = 3$
   b) $x = -1$, $y = 0$

6. a) ratkaisuna suoran $y = 3x - 2$ pisteet
   b) ei ratkaisua

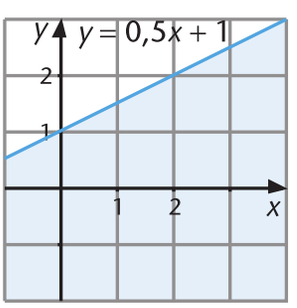
7. a) $x = 2$, $y = -2$
   b) $x = \frac{3}{10}$, $y = \frac{3}{5}$
   c) ei ratkaisua

8. kahden kappaleen pakkauksia 40 kpl, kuuden kappaleen pakkauksia 30 kpl

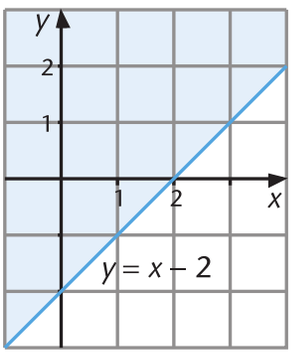
9. Yhdessä bussissa saapui keskimäärin 43 matkustajaa. Yhden taksin keskimääräinen matkustajamäärä oli 2 matkustajaa.

10. 1,5-prosenttista 0,81 l, 20-prosenttista 0,69 l

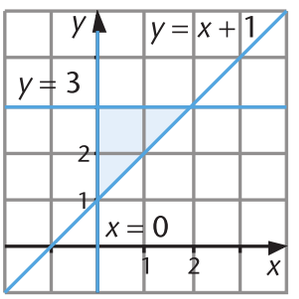
11. a) Suora $y = 0{,}5x + 1$ ei kuulu mukaan.



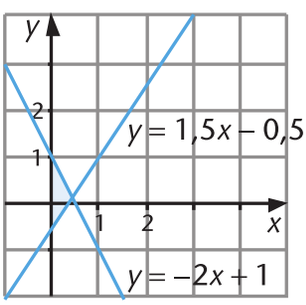
b) Suora $y = x - 2$ kuuluu mukaan.



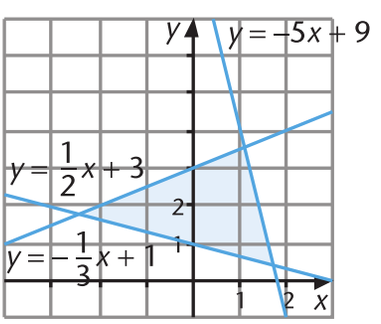
12. a) Suorat kuuluvat mukaan.



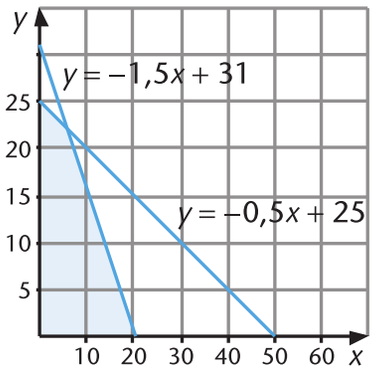
b) Suorat kuuluvat mukaan.



c) Suorat eivät kuulu mukaan.

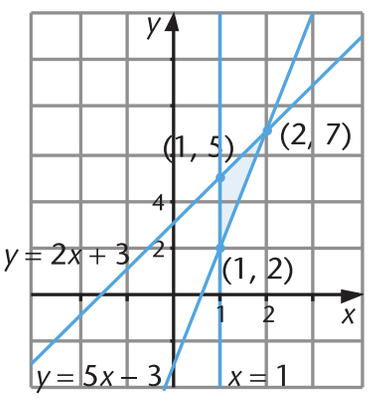


13. $3x + 2y \leq 62$,
   $x + 2y \leq 50$,
   $x \geq 0$, $y \geq 3$
   x = ruisvoileipien määrä
   y = sämpylöiden määrä



14. a) suurin arvo 4,5,
pienin arvo 0
b) ei suurinta arvoa,
pienin arvo 6,2

15.



suurin arvo −7,6,
pienin arvo −22,1

16. a) $0{,}10x + 0{,}40y$ (€)
x = rehu A (kg)
y = rehu B (kg)
b) $160x + 100y \geq 2200$
$2x + 10y \geq 150$
$x \geq 0,\ y \geq 0$

17. 20 kpl isoja koreja ja
10 kpl pieniä koreja

18. 30 salkkua,
160 iltalaukkua

19. a) 54 b) $\frac{2}{39}$

20. a) on b) ei

21. a) 20, 24, 28, 32, …
b) $a_n = 20 + (n-1) \cdot 4$
$= 16 + 4n$
c) 72 sivua

22. a) 37 b) 10 portaalla

23. a) $a_n = 5 - 4n$
b) $a_{21} = -79$

24. a) ei ole b) on

25. 34 jäsentä

26. a) $a_n = 2{,}90 + 0{,}40n$
b) 50,9 m

27. a) 5312 b) 493

28. 3720

29. a) $a_n = 6000 - 450n$
b) 36 900 katsojaa

30. a) 450 m
b) $209\ \frac{\text{km}}{\text{h}}, 108\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

31. a) $a_n = 3 \cdot (-5)^{n-1}$
b) −234 375

32. $a_1 = -384$

33. 7. jäsen

34. 400 min = 6 h 40 min
kuluttua

35. a) 7700 matkustajaa
b) 15 vuotta

36. a) 12 210 000
b) 7,473

37. vähintään 20

38. 256 l

39. 2472,35 €

40. 400 tainta

Harjoituskoe 1

1. a) (7, 5)
b) $x = 3\frac{1}{8},\ y = \frac{3}{8}$

2. 24 jäsentä

3. a) 84, jäsen
b) $a_6 = 22{,}8$
$S_{15} = 2621{,}4$

4. a) 132 min ≈ 2,2 h
b) 85 h

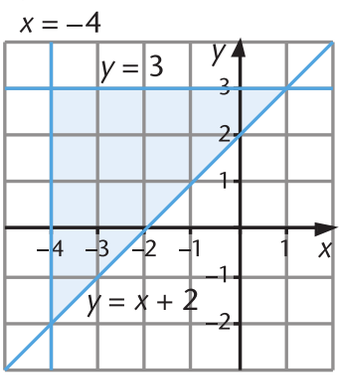
5. suurin arvo 20,5
pisteessä
(1,75; −0,25)
pienin arvo 1 pisteessä
(1, 2)

6. lanka A 0,54 m,
lanka B 0,32 m

Harjoituskoe 2

1. a) 3, 15, 35, 63, 99
b) −7, −8, −9, −10, −11
c) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \frac{1}{162}$

2. a) $a = \frac{1}{2},\ b = -3$
b)



Suora $y = 3$ ei kuulu
mukaan.

3. Jari 5 €/h, Pekka 4 €/h

4. 26,5 %

5. a) 2046
b) vähintään 12
soittokierrosta

6. 10 098 €, 8 vuotta

Harjoituskoe 3

1. a) ei kuulu
   b) kuuluu
   c) ei kuulu

2. analyyttinen sääntö:
   $a_n = 23 - 3n$
   rekursiivinen sääntö:
   $a_n = a_{n-1} - 3$, $a_1 = 20$,
   $n = 2, 3, \ldots$

3. a) 3400
   b) 25. rivillä 48. paikka vasemmalla

4. $4\frac{1}{2}$

5. pöytiä 10 kpl
   tuoleja 10 kpl

6. 2138,63 €

Ekstrat

1. a) $x = -1$ ja $y = 2$ tai $x = 2$ ja $y = -7$
   b) $x = -1$ ja $y = 5$

2. a) $(-3, -1)$ ja $(3, 11)$
   b) $(0, 3)$ ja $(3, -9)$

3. a) $x = -1$ ja $y = -8$ tai $x = 4$ ja $y = 2$
   b) $x = -5$ ja $y = 36$ tai $x = -\frac{1}{2}$ ja $y = 0$

4. $(3, 2)$ ja $(2, 0)$

5. a) $a = 10$, $b = -13$, $c = -12$
   b) $a = -4$, $b = 1$, $c = -2$

6. a) $x = -\frac{1}{5}, y = \frac{3}{5}, z = 0$
   b) $x = 3, y = \frac{7}{2}, z = \frac{17}{4}$

7. $x = 0, y = -\frac{1}{5}, z = \frac{2}{5}$

8. a) $y = -2x^2 + 5x - 6$
   b) $y = -x^2 + 3$

9. Markus 42 vuotta,
   Timo 35 vuotta,
   Pekka 22 vuotta

10. aikuisia 30, eläkeläisiä 20 ja lapsia 15

11. mansikoita 1,2 kg,
    porkkanoita 0,8 kg ja
    herneitä 0,5 kg

12. appelsiinitiivistettä 0,4 l,
    omenatiivistettä 0,3 l ja
    vettä 1,5 l

13. a) 10, –9, 10, –9
    b) 4, 28, 316, 3772

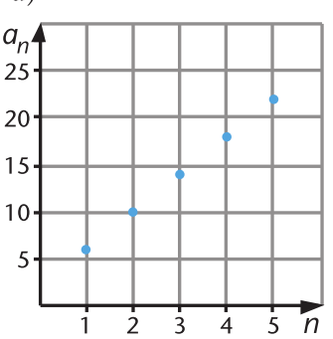
14. a) 316 b) –18

15. a) 25, 40, 65
    b) 0, 2, 2

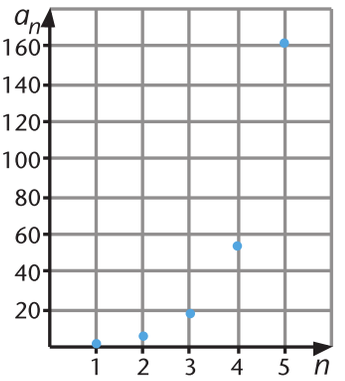
16. esimerkiksi
    $a_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2})$,
    $n = 3, 4, 5, \ldots$
    $a_1 = 1$, $a_2 = 5$

17. Susien määrä nousisi 92:een seuraavan kymmenen vuoden aikana.
    Rekursiosääntö
    $a_n = 1{,}2a_{n-1} - 8$,
    $n = 2, 3, 4, \ldots$
    $a_1 = 50$

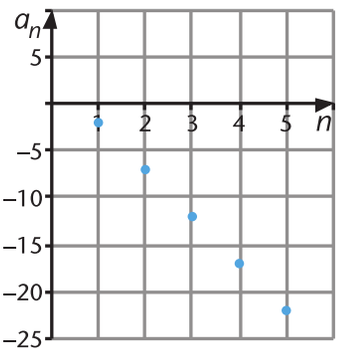
18. a)



b)

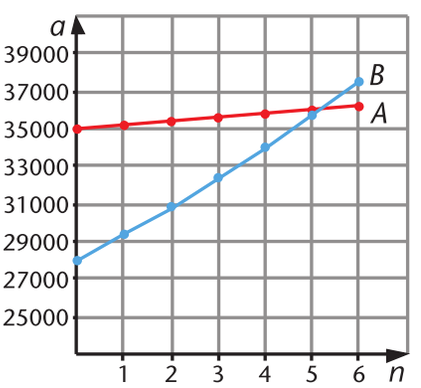


c)



19. a) *A*: 35 000, 35 200, 35 400, …
    B: 28 000, 29 400, 30 870, …

    b)



    Kaupungin *B* asukasluku ylittää kaupungin *A* asukasluvun vuonna 2010.

20. a) Vaihtoehto A: 20 kuukauden kuluttua
    Vaihtoehto B 8 kuukauden kuluttua

Hakemisto

A
aritmeettinen lukujono 77
aritmeettinen summa 89

D
differenssi 78

E
epälineaarinen yhtälöpari 129
epäyhtälöryhmä 35
erotusvakio 77

G
geometrinen lukujono 98
geometrinen summa 107, 109

J
jäsen 68

L
leikkauspiste 10
lineaarinen epäyhtälö 31
lineaarinen optimointi 44
lineaarinen yhtälö 8
lukujono 68

P
päättymätön lukujono 67
päättyvä lukujono 67

R
rajoitusehto 56
rekursiivinen lukujono 140
rekursiosääntö 141

S
sijoitusmenetelmä 17
suhdeluku 98

T
termi 68

Y
yhteenlaskumenetelmä 17
yhtälöpari 17
yhtälöryhmä 132
yleinen jäsen 68, 79, 99
äärellinen lukujono 67
ääretön lukujono 67